Oberlin College Library
JUN 14 1924

Physikalische Zeitschrift

begründet von **E. Riecke** und **H. Th. Simon**

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von **Johannes Stark**

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Goldmark 11.— postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.— vierteljährlich. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Goldmark —.20, Beilagen mit Goldmark 60.— berechnet.

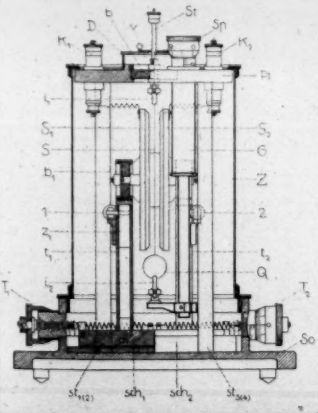
Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 8. Leipzig, 15. April 1924. No. 660. Printed in Germany. 25. Jahrgang.

Phys.-mech. Institut von Prof. Dr. M. Th. Edelmann & Sohn,

München.



Saiten-Elektrometer

nach Lutz-Edelmann (neue Form).

C. W. Lutz, Physik. Zeitschrift, 24. Jahrgang. 1923. Seite 166—170.

Katalog 30, Spezialliste No. 32 über Saitengalvanometer und Registrierapparate, Spezialliste No. 31 über einfache Präzisionsschulapparate gratis und franko.

ERZEUGNISSE UNSERER ABTEILUNG: PHYSIK

VOLLSTÄNDIGE EINRICHTUNGEN PHYSIKALISCHER LABORATORIEN HÖHERER SCHULEN ETC.
ORIGINAL-**ERNECKE**-KONSTRUKTIONEN.
SCHUL-PROJEKTIONS-APPARATE.
FUNKEN-INDUKTOREN.
RESONANZ-APPARATE NACH **DR. SEIBT.**
DEMONSTRATIONS-GALVANOMETER.
AUSARBEITUNG VON PATENTEN ETC.

SIGNALAPPARATEFABRIK
JULIUS KRÄCKER
AKTIENGESELLSCHAFT
BERLIN W. 57. BÜLOW-STR. 47.

Spindler & Hoyer G.m. b. H.
Göttingen 3.

Apparate für luftelektrische und radioaktive Messungen. — Erdbebenregistrierapparate. — Normalbatterien, Kondensatoren, Mikrowage. — Quarzfadenelektroskop nach Wiechert (siehe Abbildung).

Spektrographen
Spektrometer
Polarisations-Mikroskope

R. FUESS
BERLIN-STEGLITZ

Projektionsapparate
Goniometer
Instrumente für technische und wissenschaftliche Zwecke

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

No. 8. 15. April 1924. 25. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 10 am 5. Mai 1924.

INHALT:

Originalmitteilungen:

K. Lichtenecker, Der elektrische Leitungswiderstand künstlicher und natürlicher Aggregate. S. 169.

G. Wentzel, Bemerkungen über Serienspektren, an deren Emission mehr als ein Elektron beteiligt ist. S. 182.

E. Anding, Über eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation. S. 183.

L. Courvoisier, Bemerkungen zu dem Artikel von Hans Kienle „Kosmische Refraktion". S. 187.

C. Cranz, Erwiderung auf einige Bemerkungen des Herrn v. Gleich. S. 188.

G. v. Gleich, Entgegnung auf die hauptsächlichsten Bemerkungen des Herrn Cranz. S. 191.

Besprechungen:

K. Gruhn, Elektrotechnische Meßinstrumente. S. 192.

M. Milankovitch, Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire. S. 192.

Tagesereignisse. S. 192.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Der elektrische Leitungswiderstand künstlicher und natürlicher Aggregate.

Von Karl Lichtenecker.

Inhalt.

I. Kapitel.
Entwicklung des Problems. Zweck und Ziel der vorliegenden Untersuchung.

II. Kapitel.
Abhängigkeit des Widerstandes von der Gestalt, Lage und Anordnung der „Bausteine".

III. Kapitel.
Die Abhängigkeit des Widerstandes von dem Raumverhältnis und von dem Widerstandsverhältnis der Bestandteile.
Tafeln und Diskussionen.

IV. Kapitel.
Aufstellung einer allgemeinen Funktion für den Widerstand und für die Leitfähigkeit eines zweidimensionalen Leiters bei beliebigem Raumanteil der Bestandteile.

V. Kapitel.
Der körperliche Leiter. Anwendung auf natürliche Metallegierungen.
Zusammenfassung.

I. Kapitel.

Entwicklung des Problems. Zweck und Ziel der vorliegenden Untersuchung.

Die Frage des elektrischen Leitungswiderstandes künstlicher und natürlicher metallischer Aggregate bei Ausschluß sekundärer Erscheinungen (Mischkristallbildung und so fort) habe ich durch eine Anzahl von Abhandlungen geklärt.

Angeregt wurden meine Untersuchungen durch den Hinweis W. Guertlers[1]) darauf, daß die Berechnung eines Konglomerates etwa schachbrettartig angeordneter Elemente aus zwei Metallen zwei verschiedene, also miteinander nicht vereinbare Werte für den elektrischen Widerstand liefert, wenn man den Körper einmal nach Platten, ein zweites Mal nach Stäben zerlegt denkt.

Guertler, der in der angeführten Arbeit das Paradoxon aufstellt, gibt in derselben auch schon die Ursache des scheinbaren Widerspruches richtig an, die darin liegt, daß zur fehlerfreien Widerstands-, bzw. Leitfähigkeitsberechnung eines räumlichen Leiters nur eine Zerlegung nach Stromfäden, bzw. nach Niveauflächen zulässig ist, Stromfäden und Niveauflächen im Innern des Leiters jedoch im allgemeinen nicht mit den Begrenzungsflächen der Elemente zusammenfallen, die das Konglomerat aufbauen.

Da die Zerlegung nach Längsstäben in der Stromrichtung für den spezifischen Widerstand (Widerstand eines Würfels von der Kante 1) das arithmetische, die Zerlegung nach Platten quer zur Stromrichtung dagegen das harmonische Mittel der spezifischen Widerstände der beiden Bestandteile ergibt, schloß Guertler richtig, daß der wahre Widerstandswert irgendwo zwischen diesen beiden Grenzen liegen müsse, wie es auch die Messungen Matthiessens[1]) an Metallegierungen ohne wesentliche Mischkristallbildung zeigen.

Wo innerhalb dieser Schranken — arithmetisches und harmonisches Mittel — der Widerstand des Aggregates zu suchen sei, darüber versucht Guertler keinerlei Vermutung aufzustellen. Er bezeichnet diese Frage a. a. O. vielmehr als „ein schwieriges und bislang ungelöstes mathematisches Problem, dessen Lösung von außerordentlichem Werte wäre".

In meiner ersten, diesen Gegenstand behandelnden Arbeit[2]), die im Nachfolgenden der Kürze halber mit (I) bezeichnet sei, wurde es meines Wissens zum erstenmal unternommen, den Wert des Widerstandes innerhalb obiger

1) W. Guertler, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 5, 17. 1908.

1) A. Matthiessen, Pogg. Ann. 122, 19, 1864.

2) K. Lichtenecker, Physik. Zeitschr. 10, 1005, 1909.

beider Grenzen unter Zugrundelegung einfachster Annahmen näher zu bestimmen. Die Gebiete, innerhalb derer die Stromfadenbegrenzungen bzw. die Niveauflächen über die Materialgrenzen hinübergreifen, stellen bei würfelförmiger Gestalt der Teilchen, die dort nach Guertlers Anregung angenommen ist, jedenfalls sehr flache Segmente dar, solange das Verhältnis der beiden Widerstände $v = \frac{w_1}{w_2}$ sich der Größenordnung nach nicht wesentlich von der Einheit entfernt. Diese Gebiete wurden bei der Rechnung durch kongruente, parallelepipedische Räume von der geringen, unbekannten Dicke h ersetzt und diese letztere durch Gleichsetzung des nach Querplatten und nach Längsstäben zerlegt berechneten Leitungswiderstandes bestimmt. Die sich aus diesem Ansatze ergebenden Werte für den Widerstand von Legierungen mit 50 Proz. Mischungsverhältnis stimmen für alle fünf in Betracht kommenden Metallegierungen, die Matthiessen untersucht hat, nämlich: $ZnCd$, $CdSn$, $ZnSn$, $SnPb$ und $CdPb$, mit den gemessenen Widerstandswerten innerhalb der experimentellen Unsicherheitsgrenze überein.

Als das — recht zurückhaltend formulierte — Ergebnis dieser Untersuchung, das auch heute im vollem Umfange aufrecht erhalten werden muß, wurde festgestellt:

1. Die Aufstellung einer einfachen Formel, mittels deren die Widerstände gleicher Raumteile von Legierungen des mischkristallfreien Typus aus den spezifischen Widerstandswerten der Bestandteile berechnet werden können.

2. Es wurde in hohem Maße wahrscheinlich gemacht, daß die Abweichungen des Widerstands der betrachteten Legierungen vom linearen Gesetz tatsächlich von Schwankungen des Stromfadenquerschnittes im Innern des inhomogenen Leiters herrühren.

3. Es wurde für die übrigen Legierungen (nämlich die mit Mischkristallbildung) eine genauere Trennung des beobachteten Widerstands in den primären und den durch die Mischkristallbildung hervorgerufenen zusätzlichen Widerstand ermöglicht.

Ein Bericht über Versuche[1]), die die Abweichung des Widerstandswertes vom linearen Verlauf nicht einmal dem Vorzeichen nach richtig lieferten, indem der Widerstand zum Teil erheblich über dem arithmetischen Mittel der Bestandteile angegeben war, gab mir Anlaß zu einer kurzen Mitteilung (II)[2]).

1) C. Benedicks, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13, 351, 1916; 14, 481, 1917.

2) K. Lichtenecker, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 14, 484, 1917.

In dieser Mitteilung ziehe ich eine Untersuchung von Maxwell zum Vergleiche mit den numerischen Ergebnissen meiner Arbeit (I) heran. Der nach der Maxwellschen Formel sich berechnende Widerstand befindet sich in vollster Übereinstimmung mit den von mir seinerzeit berechneten Werten. Es ist dies aus einem doppelten Grunde bemerkenswert. Erstens bezieht sich die Maxwellsche Untersuchung auf Kugeln, die in einem zusammenhängenden Leiter eingebettet sind. Man kann daher zwei Werte für den Widerstand der Legierung angeben, je nachdem man bei gleichem Widerstandsverhältnis $v = \frac{w_1}{w_2}$ und gleichem Raumanteil beider Bestandteile an dem Aggregat den besseren oder den schlechteren Leiter als den eingesprengten annimmt und danach in die Maxwellschen Rechnungen eingeht. Damit erhält man, da in der Natur keine der beiden Komponenten bei gleichem Raumverhältnis diesbezüglich ausgezeichnet sein wird, zum erstenmal zwei neue Schrankenwerte für den Widerstand der Legierung, die wesentlich enger liegen, als die beiden, durch arithmetisches und harmonisches Mittel gegebenen Grenzen. Die von mir damit beschrittene Methode der Einengung der zu ermittelnden Widerstandswerte in ein System von enganschließenden Schranken hat, wie die folgenden und insbesondere die vorliegenden Untersuchungen des Verfassers zeigen, gestattet, das Problem mit Erfolg zu bearbeiten.

Zur zahlenmäßigen Orientierung sei hier das in der Arbeit (II) herausgegriffene Beispiel wiederholt.

Tabelle I.

Bestandteile	Widerstand berechnet als lin. Funktion		Widerstand		
	d. Widerstandes	der Leitfähigkeit	berechnet nach Maxwell schlecht, bess. Leiter zusammenhängend	berechnet nach Lichtenecker (I)	gemessen v. Matthiessen
$b \ldots 21{,}68$	14,63		12,68	12,24	12,18
		11,23	11,93		
$c \ldots 7{,}58$					

Diese weitgehende Übereinstimmung der von Maxwell für Kugeln, die in einem zusammenhängenden Leiter suspendiert sind, berechneten Widerstandswerte mit den vom Verf. auf Grundlage des Guertlerschen räumlichen Schachbrettmodells ermittelten Werten gab aber auch

zweitens den ersten Hinweis auf das wichtige Ergebnis der folgenden Untersuchungen, wonach der Widerstand eines Leiteraggregates von der Gestalt der das Aggregat aufbauenden Elemente nur in überraschend geringem Maße abhängt.

Als drittes und letztes Ergebnis konnte aus der Vergleichung der Tabelle I geschlossen werden, daß in den natürlichen Legierungen offenbar beide Bestandteile gleichberechtigt, das heißt, im gleichen Maße zusammenhängend, bzw. isoliert auftreten, da sowohl der von Matthiessen gemessene als auch der vom Verfasser auf Grund des Schachbrettmodells errechnete Widerstandswert innerhalb (und zwar ziemlich genau in der Mitte) des recht engen Intervalls liegt, das von den beiden nach Maxwell sich ergebenden Werten eingeschlossen wird. Ob allerdings Maxwells Rechnung auch für namhafte Konzentrationen hinreichend genau ist, blieb noch offen.

In umfassenderer Form habe ich das vorliegende Problem im Jahre 1918[1]) wieder aufgegriffen (III). Als dauernde Ergebnisse dieser Arbeit sind anzuführen:

1. Volle Auswirkung des Rayleighschen Gesetzes in der demselben von Maxwell gegebenen Form über den Leitungswiderstand körperlicher Leiter — ergibt die von Guertler als für das Schachbrettmodell gültig ausgesprochenen Grenzwerte (arithmetisches und harmonisches Mittel der Widerstände der Bestandteile) als allgemeingültige äußerste Schranken, und zwar sowohl für künstliche Aggregate mit vollständig regelloser Anordnung und Gestalt der konstituierenden Teilchen, als auch für natürliche Legierungen.

2. Das Rayleigh-Maxwellsche Gesetz gibt die — vom Verfasser zunächst an einem Beispiel nachgewiesene — Möglichkeit, bedeutend engere Schranken für den wahren Wert des Widerstandes von Aggregaten zu berechnen, als es die „Guertlerschen" Schranken sind.

3. Die vom Verfasser in der Abhandlung I errechneten Widerstandswerte liegen nicht bloß innerhalb des alten, großen Guertlerschen Intervalls, sondern auch innerhalb des für eine besondere Form und Lagerung der konstituierenden Teilchen vom Verfasser errechneten, sehr engen, neuen Intervalls (und zwar wieder in der Mitte desselben).

Ein dort (III) berechnetes Beispiel sei zur Orientierung über die Größenverhältnisse der Intervalle wiedergegeben. Wie man aus der Tabelle ersieht, ist das „neue" Intervall in dem angezogenen Beispiel nur etwa ein Viertel des alten, „Guertlerschen" Intervalls.

1) K. Lichtenecker, Physik. Zeitschr. **19**, 374, 1918.

Tabelle II.

der Bestandteile	Widerstand „Guertlers" Intervall	Widerstand „Neues" Intervall Lichtenecker (III)	berechnet nach Lichtenecker (I) ex 1909
1	1.33	1.39	1.414
2	1.5	1.44	

Kurz darauf suchte H. C. Burger[1]) den Leitungswiderstand eingesprengter Partikel in erster Näherung aus den Feldgleichungen, allerdings unter Beschränkung auf sehr kleine Konzentrationen, zu berechnen. Die Werte Burgers für Kugeln erwiesen sich als innerhalb der vom Verfasser angegebenen Grenzen liegend. Herr Burger schreibt: „Es verdient Beachtung, daß die gefundenen Werte für die Leitfähigkeit zwischen den von Lichtenecker angegebenen Grenzen liegen".

Bezüglich der Abhängigkeit des Aggregatwiderstandes von der Gestalt der Partikel jedoch glaubte Herr Burger den Schluß aus seiner Rechnung ziehen zu sollen, daß das Leitvermögen der Kombination außer von den spezifischen Widerständen der Komponenten auch als „sehr wesentlich von der Begrenzung", also von der Gestalt der Partikel, abhängig anzunehmen sei.

Demgegenüber war darauf hinzuweisen[2]), daß die von Burger in Betracht gezogenen Unterschiede in der Gestalt der Partikel — nämlich (1) Kugeln, unendlich dünne, unendlich ausgebreitete (2) Fäden und (3) Platten (als Grenzfälle eines dreiachsigen Ellipsoids) — Extreme darstellen, die weder bei künstlichen Aggregaten, noch bei natürlichen Legierungen auch nur näherungsweise erreichbar sind (IV). Für solche extreme Partikelgestalten ist die Abhängigkeit des Leitungswiderstandes von der Gestalt — und namentlich auch von der Lage der Partikel — trivial. Bei der Anwendung der Burgerschen Rechnungsweise ist außerdem große Vorsicht geboten, da wie Verfasser a. a. O. nachgewiesen hat, für faden- und plattenförmige Partikel Burgers Formeln auch negative, also unmögliche Werte für die Leitfähigkeit und für den Widerstand des Aggregates ergeben. Innerhalb des engen Geltungsbereiches der Burgerschen Rechnung (sehr geringe Volumkonzentration des einen Bestandteiles und gleichzeitig geringer Unterschied der spezifischen Leitfähigkeiten beider Komponenten) dagegen, ist nicht nur Übereinstimmung mit den vom Verfasser angegebenen Grenzen aus Burgers Formeln zu

1) H. C. Burger, Physik. Zeitschr. **20**, 73, 1919.
2) K. Lichtenecker, Physik. Zeitschr. **21**, 352, 1920.

folgern, sondern auch eine nur geringe Abhängigkeit des Widerstands von der Partikelgestalt (vgl. IV).

In einer zweiten Notiz[1]) hat übrigens Burger loyalerweise ausdrücklich hervorgehoben, daß die Geltung meiner Untersuchungen über die Leitfähigkeit von Legierungen durch seine Arbeit nicht berührt werden.

II. Kapitel.

Abhängigkeit des Widerstandes von der Gestalt, Lage und Anordnung der „Bausteine".

Die Frage nach dem elektrischen Leitungswiderstand künstlicher Aggregate erscheint zunächst sehr verwickelt. Denn es wird auf den Wert des Widerstandes des Aggregats zunächst ohne Frage von Einfluß sein können:

1. Das Widerstandsverhältnis $v = \frac{w_1}{w_2}$, also der Quotient aus den spezifischen, d. h. auf die Flächen- bzw. Raumeinheit bezogenen Widerstandswerten der beiden Bestandteile.

Für Aggregate, deren spezifische Widerstände sich nur in sehr geringem Maße unterscheiden, bei denen sich also das Widerstandsverhältnis nur sehr wenig von der Einheit unterscheidet, kann der in Frage stehende Widerstand des Aggregates, wie jede natürliche Funktion in genügend engem Bereiche, als linear abhängig von den bestimmenden Größen, also hier von dem Raumanteil der Bestandteile, erwartet werden, ebenso natürlich auch die Leitfähigkeit als Reciprocum des Widerstandes oder irgendeine andere Funktion des Widerstandes. Dieser Fall bietet kein weiteres Interesse.

Andererseits liegt es außerhalb des Anwendungsgebietes, Widerstandsverhältnisse in Betracht zu ziehen, die sich etwa in der Größenordnung, also z. B. um eine Zehnerpotenz von der Einheit unterscheiden. Das Widerstandsverhältnis ist daher im Folgenden stets als von der Einheit merklich verschieden, aber nicht in der Größenordnung verschieden, zu denken.

2. Der Raumanteil der Bestandteile. Wenn es sich, wie hier stets vorausgesetzt, nur um zwei Bestandteile handelt, die das Aggregat zusammensetzen, so genügt die Betrachtung des Raumanteils des einen Bestandteils am Aggregat, da sich der des zweiten mit ihm zur Einheit ergänzt. Dieser Raumanteil wird im folgenden stets mit ϑ bezeichnet (Volumenkonzentration).

3. „Gleichberechtigung" und „Nichtgleichberechtigung" der Bestandteile.

Wenn die elementaren Bausteine der Anordnung so beschaffen sind, daß der eine der beiden Bestandteile in nichtzusammenhängenden gleichen Stücken, also „eingesprengt" wie kleine Kristalle, vorkommt, so wird bei gleichem Raumanteil und gleicher Gestalt der Bausteine der Widerstand des Aggregates noch zwei verschiedene Werte annehmen können, je nachdem der „eingesprengte" Bestandteil der besser leitende ist oder der schlechter leitende. Wie ich in II. ausgeführt und an einem anschaulichen Grenzfall beleuchtet habe, ist der Widerstand einer im übrigen gleichen Anordnung beliebiger Beschaffenheit im ersteren Falle stets größer als im letzteren. Zusammenhanglose Kupferteilchen, in Hartgummi eingesprengt gedacht, geben einen unendlich großen, die umgekehrte Anordnung dagegen gibt einen endlichen Gesamtwiderstand.

Außer diesen „nichtgleichberechtigten" Anordnungen werden auch „gleichberechtigte" der Betrachtung unterzogen werden können und die Bedeutung gerade dieser letzteren für praktische Anwendungen auf Legierungen liegt auf der Hand.

4. Die Gestalt der Bausteine der Anordnung. Der Frage nach der Abhängigkeit des Aggregatwiderstandes von der Gestalt der das Aggregat aufbauenden Teilchen kommt besondere Wichtigkeit zu. Irgendwelche theoretisch gesicherte Ergebnisse hierüber sind bisher nicht bekannt geworden; die vorliegende Arbeit wird sich daher mit diesem Punkt besonders zu beschäftigen haben.

5. Die Orientierung der Bausteine gegen die Stromrichtung. Wie schon Maxwell bemerkt hat, ist die Leitfähigkeit eines körperlichen Leiters, der aus Teilen verschiedenen spezifischen Widerstandes besteht, von der Stromrichtung im allgemeinen nicht unabhängig. Es wird daher für jede der in Untersuchung gezogenen elementaren Gestaltsformen der „Bausteine" des Aggregates jedesmal — kreisförmige (kugelförmige) Gestalt der Bausteine ausgenommen — gesondert die Frage nach dem Einfluß der Orientierung der Teilchen gegen die Stromrichtung zu stellen sein, wenn eine solche geordnete Orientierung in Ansatz gebracht wird; bzw. ist zu untersuchen, ob und in welchem Umfange sich diese Einflüsse gegenseitig wegheben, wenn die „Bausteine" eine über alle Richtungen in der Ebene (im Raume) regellos verteilte Orientierung aufweisen.

6. Die Anordnung der „Bausteine". Teilchen gleichen spezifischen Widerstandes, gleichen Raumanteils, gleicher Gestalt und gleicher Orientierung gegen die Stromrichtung werden noch verschiedene Widerstände des Aggregates ergeben können, je nach ihrer Anordnung in der Ebene (im Raume). Besteht eine solche regelmäßige Anordnung, so werden also die ver-

[1]) H. C. Burger, Physik. Zeitschr. **22**, 28, 1921.

schiedenen Flächengitter, bzw. Raumgitteranordnungen, deren Gitterpunkte mit den Bausteinen des Aggregates besetzt zu denken sind, wenigstens die einfachsten derselben auf ihren Einfluß auf den Gesamtwiderstand hin zu untersuchen sein.

Im Folgenden soll nun, unter Beschränkung auf typische, einfachste Fälle, gezeigt werden, in welcher Weise und in welchem Ausmaße sich dieses große Gebiet durch infinitesimale Anwendung der Rayleighschen Schranken des Widerstandes bearbeiten läßt. Wegen der größeren Einfachheit und Durchsichtigkeit der Rechnungen, aber auch aus einem besonderen, noch zu besprechenden sachlichen Grunde werden dabei zunächst zweidimensionale Aggregate der Untersuchung unterzogen.

In bekannter Weise wird der Widerstandswert des Aggregates bestimmt, bzw. in Schranken eingeengt, indem eine Zerlegung in parallel geschaltete Streifen in der Stromrichtung, ein andermal in hintereinander geschaltete Streifen quer zur Stromrichtung zugrunde gelegt wird, wobei jedoch die Unterteilung infinitesimal fortgesetzt gedacht wird.

Zugrunde gelegt wird der Rechnung stets ein „Elementargebiet", d. h. das kleinste Gebiet, durch dessen Aneinanderreihung sich das Aggregat selbst herstellen läßt. Das Elementargebiet muß außerdem der Bedingung genügen, daß seine Begrenzungen infolge der Symmetrieeigenschaften der Anordnung durch Stromfäden, bzw. Niveaulinien gebildet werden.

Ist das Elementargebiet, wie im folgenden stets, quadratisch, so ist der Widerstand des Elementargebietes bei zweidimensionalen Aggregaten auch bereits der gesuchte spezifische Widerstand der Gesamtanordnung, da der Widerstand eines flächenförmigen Leiters nur von der Gestalt und Beschaffenheit, aber nicht von der Größe der Fläche abhängt.

Aufstellung von vier Schrankenwerten für den Aggregatwiderstand in einem einfachen, konkreten Fall.

Die hier in Anwendung gebrachte Methode soll zunächst an einem besonders einfachen und ergiebigen Spezialfall vorgeführt werden.

Betrachtet werde ein flächenhaftes Aggregat, bestehend aus quadratischen eingesprengten Partikeln vom spezifischen Widerstand w_1 in eine Muttersubstanz vom spezifischen Widerstande w_2. Die Anordnung der Partikel sei ein quadratisches Flächengitter, die Begrenzungen der Partikel seien den Hauptgitterrichtungen parallel, die Stromrichtung falle gleichfalls mit einer der beiden Gitterrichtungen zusammen. Das Elementargebiet, durch dessen Zusammensetzung sich das Aggregat aufbauen läßt, ist in diesem Falle ein Quadrat vom spezifischen Widerstande w_1, eingebettet in ein Quadrat vom spezifischen Widerstande w_2. Für die Berechnung genügt es in diesem, sowie in einer Reihe folgender Fälle, den vierten Teil dieses Elementargebietes zugrunde zu legen. Hierbei erscheint der vierte Teil des eingesprengten Quadrates in einer der vier Ecken des umgebenden, wie es Fig. 1 veranschaulicht. Die halbe Quadratseite

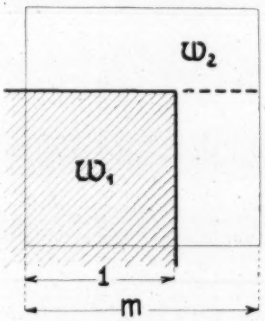


Fig. 1.

des „Einschlusses" sei gleich der Einheit, die halbe Quadratseite des umschließenden Materials gleich m gesetzt.

A. Berechnung der oberen Grenze W_0 des spezifischen Widerstandes des Aggregates.

Zerlegung in gegeneinander isolierte, infinitesimale Streifen, die sich in der Stromrichtung erstrecken, ergibt in diesem Falle ohne Rechnung für die Gesamtleitfähigkeit

$$A = \frac{1}{w_1 + w_2(m-1)} + \frac{1}{w_2 \cdot m/m - 1} = \frac{(m-1)\cdot w_1 + (m^2 - m + 1)\cdot w_2}{/w_1 + (m-1)\cdot w_2/\cdot m w_2}$$

und somit für die obere Grenze des gesuchten spezifischen Widerstandes

$$W_0 = \frac{w_1 + (m-1)w_2}{(m-1)w_1 + (m^2 - m + 1)w_2} \cdot m w_2 .$$

Beispiel: Es sei $m = 2$; dies entspricht einem Raumverhältnis $\vartheta = 25$ Proz. Dies in die Formel für W_0 eingesetzt, ergibt:

$$W_0 = \frac{2w_2(w_1 + w_2)}{w_1 + 3w_2} .$$

Wählt man schließlich etwa

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 2,$$

so ergibt sich für

$$W_0^{1,2} = \frac{12}{7} = 1{,}714.$$

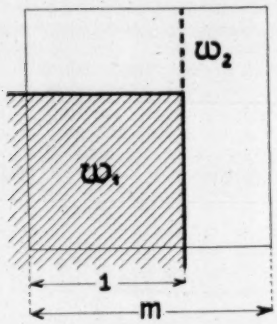


Fig. 2.

B. Berechnung der unteren Grenze W_u des spezifischen Widerstandes des Aggregates.

Zerlegung in zur Stromrichtung senkrechte Streifen (mit unendlich dünnen, unendlich leitenden Zwischenwänden) ergibt auch hier ohne weitere Rechnung (vgl. Fig. 2):

$$W_u = \frac{1}{\frac{1}{w_1} + \frac{m-1}{w_2}} + \frac{w_2(m-1)}{m} =$$

$$= \frac{w_2[(m^2 - m + 1)w_1 + (m-1)w_2]}{m[w_2 + (m-1)w_1]}.$$

Beispiel:

$$m = 2; \quad \vartheta = 25 \text{ Proz.} \quad W_u = \frac{w_2(3w_1 + w_2)}{2(w_1 + w_2)},$$

setzt man wieder

$$w_1 = 1, \qquad w_2 = 2,$$

so erhält man:

$$W_u^{1,2} = \frac{5}{3} = 1{,}667.$$

Wir haben nun zu untersuchen, welche Grenzen für den Widerstand sich ergeben, wenn unter sonst gleichen Umständen, also unter Annahme gleicher spezifischer Widerstände der Bestandteile und bei gleichem Raumanteil der Bestandteile an dem Aggregate, nicht der besser leitende, sondern der schlechter leitende Bestandteil eingesprengt ist.

Wir setzen daher in die gewonnenen Ausdrücke W_0 und W_u jetzt $w_1 = 2$ und $w_2 = 1$ ein. Das Raumverhältnis ϑ für den eingesprengten Bestandteil beträgt, wenn der Anteil der beiden Bestandteile an dem Aggregat derselbe sein soll, wie früher, jetzt 75 Proz.

Die Vielfachheitszahl m (Verhältnis der beiden Quadratseiten des Elementargebietes) nimmt für dieses Raumverhältnis den Wert an:

$$m = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Die Einsetzung ergibt:

$$W_0^{2,1} = 1{,}672$$
$$W_u^{2,1} = 1{,}662.$$

Der Vergleich mit den Werten:

$$W_0^{1,2} = 1{,}714$$
$$W_u^{1,2} = 1{,}667$$

die wir im Vorausgehenden gewonnen hatten, ergibt folgendes:

1. Obere und untere Schranke für den Wert des Widerstandes des Aggregates fallen, wie zu erwarten stand, beide höher aus, wenn der besserleitende Bestandteil den Einschluß bildet.

2. Die Wertunterschiede zwischen der oberen und unteren Grenze sowohl, als auch zwischen den beiden Grenzwertepaaren untereinander, sind sehr gering. Man beachte, daß im vorliegenden Falle Linearität des Widerstandes eine obere Grenze $W_0 = 1{,}750$ und Linearität der Leitfähigkeit eine untere Grenze $W_u = 1{,}600$ liefert. Die bisherige Unsicherheit betrug demzufolge 150 Tausendstel; dieselbe ist durch unser Verfahren in dem einen Falle ($W^{1,2}$) auf 47 Tausendstel, im anderen ($W^{2,1}$) sogar auf nur 10 Tausendstel herabgedrückt. Die Allgemeingültigkeit dieser, an dem vorliegenden Beispiel gezeigten Ergebnisse geht aus der beigegebenen Tabelle III hervor.

Außer diesen Ergebnissen, die volle Strenge zu beanspruchen haben, ergeben sich für das später zu Behandelnde schon jetzt die folgenden Anhaltspunkte:

3. Für Aggregate, die sich aus einer großen Anzahl elementarer Räume von der hier angenommenen Beschaffenheit zusammensetzen, bei denen aber weder der Fall, daß der Einschluß der besser leitende Bestandteil ist, noch der entgegengesetzte Fall bevorzugt erscheint, ist der Spielraum, der für den fraglichen Wert des Aggregatwiderstandes in Betracht kommt, tatsächlich noch viel enger, indem wir dann zu erwarten haben, daß der Gesamtwiderstand innerhalb der Werte zu liegen kommt, die durch das Mittel der oberen beiden Schrankenwerte einerseits, und durch das Mittel der beiden unteren Schrankenwerte andererseits gegeben sind. Diese beiden Werte sind für das gewählte Beispiel

$$\overline{W}_0 = 1{,}667 \text{ und } \overline{W}_u = 1{,}690.$$

Da, wie bereits hervorgehoben, und in meiner Arbeit III ausführlich erörtert ist, es im Wesen der angewandten Schrankenmethode liegt, daß der wirkliche Wert des Aggregatwiderstandes nicht an den Rändern, sondern im Inneren des aufgefundenen Intervalls liegt, so hat als wahrscheinlichster Wert unseres hier als Beispiel herausgegriffenen Aggregates zu gelten:

$$W = 1{,}679.$$

Der Grad der Übereinstimmung dieses Wertes mit den unter anderen Voraussetzungen sich ergebenden Werten findet später Behandlung.

Die für die Raumanteile

$\vartheta = 25$ Proz., $= 50$ Proz. und $= 75$ Proz.

und das Widerstandsverhältnis

$$v = \frac{w_1}{w_2} = 2, \text{ bzw. } v = \tfrac{1}{2}$$

sich ergebenden je vier Schrankenwerte finden sich in Tabelle III zusammengestellt. Die Mittel, die sich aus der Zusammenfassung der vier Schrankenwerte ergeben und die ursprünglichen Grenzen des großen „Guertlerschen" Intervalls sind in dieser und den folgenden Tabellen zum Vergleich hinzugefügt.

Einfluß der Orientierung der Partikel gegen die Stromrichtung.

In dem Vorangegangenen war angenommen, daß die Stromrichtung parallel zur Seitenkante der quadratischen Partikel verläuft. Wie ich in meiner Arbeit III hervorgehoben habe, hat schon Maxwell darauf hingewiesen, daß der Widerstand körperlicher Leiter im allgemeinen von der Stromrichtung nicht unabhängig sein wird. Es ist daher unsere Aufgabe, den Einfluß der Orientierung der Partikel, die das Aggregat aufbauen, auf den Widerstand desselben, bzw. auf die vier Schrankenwerte, innerhalb derer er liegen muß, zu untersuchen.

Für den besonderen Fall gleicher Volumprozente beider Bestandteile, also $= 50$ Proz., ist die Berechnung für um 45^0 gegen die Stromrichtung verdrehte quadratische Partikel in der Arbeit III des Verfassers bereits durchgeführt worden. (Siehe Einleitung S. 171). Hier soll nun der allgemeine Fall (beliebiges Raumverhältnis) behandelt werden.

Berechnung der oberen Schranke W_0 für den Widerstand.

Der Raumanteil ϑ des durch den Index „1" gekennzeichneten Bestandteils ist mit dem Längenverhältnis m, dessen Bedeutung sich unmittelbar aus der Fig. 3 ergibt, und das als „Vielfachheitszahl" bezeichnet werden möge, wie ersichtlich, durch die Beziehung verknüpft:

$$\vartheta = \frac{1}{2m^2}.$$

Zur Bestimmung des oberen Grenzwertes W_0 findet man durch Zerlegung in Streifen in der Stromrichtung (Fig. 3)

$$d\lambda = \frac{dy}{x \cdot w_1 + (m-x)w_2},$$

und somit, da

$$x + y = 1,$$

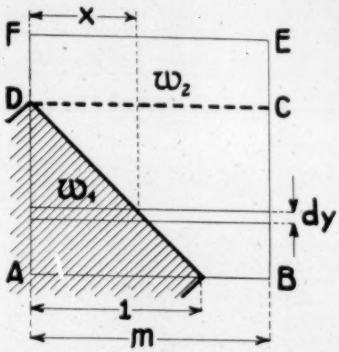


Fig. 3.

als Leitfähigkeit des Gebietes $ABCD$.

$$\lambda = \int_0^1 \frac{dx}{x w_1 + (m-x)w_2} = \frac{1}{w_1 - w_2} \cdot [\lg(x(w_1 - w_2) + m w_2)]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{w_1 - w_2} \cdot \lg \frac{w_1 + (m-1)w_2}{m w_2}.$$

Für die Leitfähigkeit λ' des Gebietes $CDEF$ hat man

$$\lambda' = \frac{m-1}{m w_2},$$

somit

$$W_0 = \frac{1}{\lambda + \lambda'} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{w_1 - w_2} \lg \frac{w_1 + (m-1)w_2}{m w_2} + \frac{m-1}{m w_2}}.$$ [1])

Analog ergibt sich für den unteren Grenzwert W_u durch Zerlegung in Streifen senkrecht zur Stromrichtung (Fig. 4)

$$d\lambda = \frac{y}{w_1 dx} + \frac{m-y}{w_2 dx}$$

$$dw = \frac{w_1 w_2 dx}{w_2 y + (m-y)w_1}$$

---

1) Für den Rauminhalt $\vartheta = 50$ Proz., d. h. für $m = 1$, geht dies, wie man sieht, über in den von mir, in der Arbeit III (Physik. Zeitschr. 19, 377, 1918) mitgeteilten Ausdruck

$$W_0 = \frac{w_1 - w_2}{\lg \frac{w_1}{w_2}}.$$

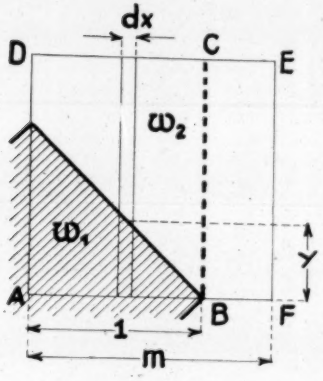


Fig. 4.

und, da wieder

$$x + y = 1$$

$$W_u = \int_0^1 \frac{w_1 w_2 dy}{y w_2 + (m-y) w_1} + \frac{(m-1) w^2}{m} =$$

$$= \frac{w_1 w_2}{w_2 - w_1} \lg \frac{w_2 + (m-1) w_1}{m w_1} + \frac{(m-1) w_2}{m}$$

$$= w_1 w_2 \left(\frac{1}{w_2 - w_1} \lg \frac{w_2 + (m-1) w_1}{m w_1} + \frac{m-1}{m w_1} \right)$$

wobei der erstere Summand von dem Gebiete $ABCD$, der zweite von dem Gebiete $BCEF$ der Fig. 4 herrührt.

Eine Zusammenstellung der nach diesen Formeln berechneten Werte gibt die Tabelle IV. Eine eingehende Diskussion der Ergebnisse findet sich an späterer Stelle. Hier sei lediglich die überraschend weitgehende Übereinstimmung der Grenzwerte und ihrer Mittel in Tabelle IV mit den entsprechenden Werten der Tabelle III für zur Stromrichtung parallele Lage der Teilchenbegrenzung hervorgehoben.

Kreisförmige Gestalt der Aggregatteilchen.

Nachdem im Vorausgehenden die Abhängigkeit des Aggregatwiderstandes von der Lage, d. h. von der Richtung der Begrenzungslinien der Aggregatteilchen untersucht worden ist, mit dem Ergebnis, daß diesem Faktor nur ein außerordentlich kleiner Einfluß auf den Wert des Gesamtwiderstandes innewohnt, haben wir den Einfluß der Gestalt der Teilchen auf den Widerstand des Aggregates unter sinngemäßer Anwendung der im Vorhergehenden mit Erfolg angewandten Methode zu untersuchen. Als besonders wichtige Gestalt kommt ohne Zweifel die Kreisgestalt in Betracht.

Wir nehmen an, das Aggregat setze sich aus Elementargebieten zusammen, die gebildet sind von einer Kreisscheibe vom spezifischen Widerstand w_1 und vom Radius r, eingebettet in ein Quadrat von der halben Quadratseite mr und vom spezifischen Widerstand w_2. Das Elementargebiet, bzw. dessen vierten Teil, stellt Fig. 5 dar.

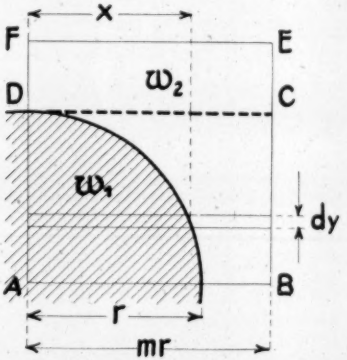


Fig. 5.

A. Berechnung der oberen Grenze W_0 des spezifischen Widerstandes des Aggregates.

$$dw = w_1 x + w_2 (mr - x) / dy$$
$$d\lambda = dy / (w_1 - w_2) x + w_2 mr.$$

Dies gibt, für $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ eingesetzt, nach leichter Umformung

$$\lambda = \frac{1}{w_1 - w_2} \int_0^1 \frac{d(y/r)}{\frac{m w_2}{w_1 - w_2} + \sqrt{1 - (y/r)^2}},$$

wenn mit λ die Leitfähigkeit des rechteckigen Gebietes $ABCD$ der Fig. 5 bezeichnet wird. Dieses Integral läßt sich in geschlossener Form auswerten; es ist

$$\lambda = \frac{1}{w_1 - w^2} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{1 - 1/a_2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \right],$$

wobei

$$a = \frac{m w_2}{w_1 - w_2}$$

den konstanten Summanden im Nenner des Integranden bedeutet.

Die Leitfähigkeit des ganzen Elementargebietes $ABEF$ und somit auch die spezifische Leitfähigkeit des Aggregates ist

$$A = \lambda + \lambda',$$

wobei

$$\lambda' = \frac{1}{w_2} \cdot \frac{m-1}{m}$$

die Leitfähigkeit des Gebietes $CDEF$ ist.

Daraus ergibt sich für die obere Grenze des spezifischen Widerstandes W_0 des betrachteten Aggregates

$$W_0^1 = \frac{1}{A} = \frac{1}{\lambda + \lambda'}.$$

Die Größe m, die „Vielfachheitszahl", wird durch das Raumverhältnis ϑ der Bestandteile des Aggregates bestimmt.

Der Zusammenhang zwischen beiden Größen ist im Nachfolgenden übersichtlich zusammengestellt.

Raumverhältnis ϑ in Proz. des Einschlusses	Vielfachheitszahl m
0	∞
10	$\frac{1}{2}\sqrt{10\pi} = 2{,}8025$
20	$\frac{1}{2}\sqrt{5\pi} = 1{,}9817$
25	$\frac{1}{2}\sqrt{4\pi} = 1{,}7725$
30	$\frac{1}{2}\sqrt{10\pi/3} = 1{,}6181$
40	$\frac{1}{2}\sqrt{5\pi/2} = 1{,}4013$
50	$\frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = 1{,}2533$
60	$\frac{1}{2}\sqrt{5\pi/3} = 1{,}1441$
70	$\frac{1}{2}\sqrt{10\pi/7} = 1{,}0593$
75	$\frac{1}{2}\sqrt{4\pi/3} = 1{,}0233$

Anschließend sei die numerische Berechnung beispielsweise für den Fall gleicher Volumprozente beider Bestandteile (Raumverhältnis $\vartheta = 50$ Proz.) mitgeteilt:

$w_1 = 1$, $w_2 = 2$, $\vartheta = 50$ Proz., $m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,

$$a = -2m = -2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\lambda = -\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{1-1/a^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\right] = 0{,}5898$$

$$\lambda' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 0{,}1011$$

$$A = \lambda + \lambda' = 0{,}6909$$

$$W_0^{1,2} = 1{,}447$$

Für Werte $-1 < a < +1$ nimmt das Argument des arctg imaginäre Werte an.

$$\lambda = \frac{1}{w_1 - w_2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{i\sqrt{1/a^2 - 1}} \operatorname{arctg} i\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right].$$

Durch Umformung erhält man in diesem Falle in reeller Form:

$$\lambda = \frac{1}{w_1 - w_2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{1/a^2 - 1}} \lg \frac{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}\right].$$

Nach dieser letzteren Formel sind die Werte für $W_0^{3,1}$, $W_0^{4,1}$ usw. berechnet.

B. Bestimmung der unteren Grenze W_u des spezifischen Widerstandes.

Zerlegung nach Streifen senkrecht zur Stromrichtung ergibt (vgl. Fig. 6):

$$d\lambda = \frac{1}{w_1} \cdot \frac{y}{dx} + \frac{1}{w_2} \cdot \frac{mr - y}{dx}$$

$$dw = \frac{dx}{\frac{y}{w_1} + \frac{mr - y}{w_2}}.$$

Setzt man $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ein, so erhält man für den Widerstand des Gebietes $ABCD$ der Fig. 6

$$w = \int_0^r \frac{dx}{\frac{1}{w_1}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{w_2}(mr - \sqrt{r^2 - x^2})}$$

und nach leichter Umformung

$$w = \frac{w_1 w_2}{w_2 - w_1} \int_0^1 \frac{d\left(\frac{x}{r}\right)}{\frac{w_1}{w_2 - w_1} m + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}}.$$

$w_1 = 2$, $w_2 = 1$, $\vartheta = 50$ Proz., $m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

$$a = \frac{1}{m} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{1 - 1/a^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} = 0{,}4974$$

$$\lambda' = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 0{,}2021$$

$$A = \lambda + \lambda' = 0{,}6995$$

$$W_0^{2,1} = 1{,}4296$$

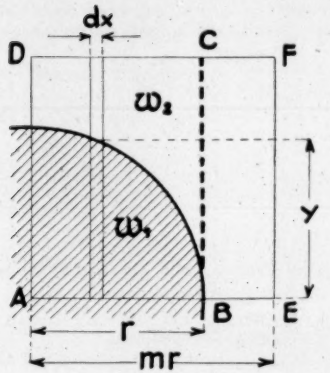


Fig. 6.

Die Ausführung der Integration liefert

$$w = \frac{w_1 w_2}{w_2 - w_1}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{1 - 1/a^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\right]$$

wobei $a = \frac{w_1 m}{w_2 - w_1}$ gesetzt ist.

Der Widerstand w' des rechtsseitigen Gebietes $BCEF$ der Fig. 6 ist gegeben durch

$$w' = w_2 \frac{m-1}{m}.$$

Somit ist die gesuchte untere Grenze W_u für den spezifischen Widerstand des Aggregates

$$W_u = w + w'.$$

Für die beispielsweise Berechnung der numerischen Werte sei wieder der Fall gleicher Volumprozente (Raumverhältnis $\vartheta = 50$ Proz.) gewählt:

$$w_1 = 1,\ w_2 = 2,\ \vartheta = 50 \text{ Proz.},\ m = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$a = m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$w = 2\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} + 1}}\right]$$

$$w = 2\,(1{,}5708 - 1{,}0734) = 0{,}9948$$

$$w' = 2\,\frac{m-1}{m} = 0{,}4042$$

$$W_u^{1,2} = 1{,}3990$$

Eine Zusammenstellung der Schrankenwerte des spezifischen Widerstandes für Aggregate mit kreisförmigen Einschlußelementen gibt, analog den Tabellen III und IV, die Tabelle V.

Ein vergleichender Blick auf diese Tabelle V im Verein mit den Tabellen III und IV läßt erkennen: Nicht nur die Lage der das Aggregat konstituierenden Teilchen gegen die Stromrichtung, sondern auch die Gestalt der elementaren Bestandteile — Quadrat und Kreis — hat innerhalb der Grenzen, innerhalb deren man Widerstände praktisch reproduzierbar messen kann, keinen Einfluß auf den Widerstand des Aggregates. Immerhin sind bisher nur Gestaltstypen zur Behandlung gelangt, die in der Stromrichtung und normal zu ihr gleiche Ausdehnung aufweisen. Es soll daher im Folgenden die Untersuchung durch Behandlung elliptischer Teilchen, bei denen obige Einschränkung gleicher Ausdehnung nicht mehr zutrifft, vervollständigt werden.

Elliptische Gestalt der Aggregatteilchen.

Die Bestimmung der Schrankenwerte des Aggregatwiderstandes für elliptische Teilchen läßt sich unschwer auf die unmittelbar vorausgegangene Ableitung für kreisförmige Teilchen zurückführen.

A. Bestimmung der oberen Grenze des Aggregatwiderstandes.

Für den rechteckigen Gebietsteil $ABCD$ (vgl. Fig. 7) mit kreisförmig gedachtem Einschluß sei genau nach dem Vorausgehenden durch Zerlegung in infinitesimale Streifen parallel zur Stromrichtung ein oberer Schrankenwert des Leitungswiderstandes bestimmt worden; der reziproke Wert dieses Widerstandswertes sei durch λ bezeichnet. Einen analogen Schrankenwert $\lambda_=$ für die Leitfähigkeit des Gebietes $ABC'D'$ mit elliptischem Einschluß, gekenn-

$$w_1 = 2,\ w_2 = 1,\ \vartheta = 50 \text{ Proz.},\ m = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$a = -2m = -2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$w = -2\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{1}{2\pi}}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2\sqrt{\frac{\pi}{2}} + 1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 1}}\right]$$

$$w = -2\,(1{,}5708 - 2{,}1606) = 1{,}1796$$

$$w' = \frac{m-1}{m} = 0{,}2021$$

$$W_u^{2,1} = 1{,}3817.$$

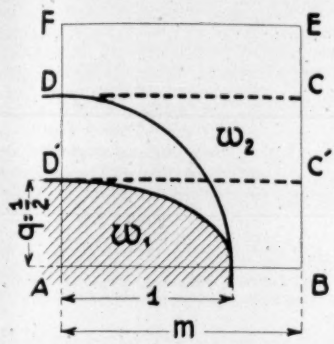


Fig. 7.

zeichnet durch die beiden Halbachsen 1 und q, erhalten wir offenbar durch die Beziehung

$$\lambda_\varepsilon = \lambda \cdot q.$$

Um die Berechnung der numerischen Werte an die für kreisförmige Einschlußpartikel anzuschließen, wollen wir zu der rechten Seite der obigen Gleichung

$$\frac{1}{w_2} \cdot \frac{m-1 \cdot q}{m}$$

addieren und subtrahieren; dies gibt

$$\lambda_\varepsilon = \left(\lambda + \frac{1}{w_2} \cdot \frac{m-1}{m}\right) \cdot q - \frac{1}{w_2} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot q.$$

Der Ausdruck in der Klammer stellt den im Vorausgehenden berechneten Leitfähigkeitswert $\frac{1}{W_0}$ des ganzen Elementargebietes mit kreisförmigem Einschluß dar. Um den entsprechenden Schrankenwert für die Leitfähigkeit des Elementargebietes mit elliptischem Einschluß zu berechnen, ist zu dem Werte λ_ε für das Gebiet $ABC'D'$ noch der Wert für die Leitfähigkeit des Gebietes $C'D'EF$ hinzuzufügen. Derselbe beträgt

$$\frac{1}{w_2} \cdot \frac{m-q}{m}.$$

Der obere Schrankenwert $(W_0)_\varepsilon$ des Widerstandes des Elementargebietes mit elliptischem Einschluß ist daher im vorliegenden Falle (d. i., große Achse der Ellipse zusammenfallend mit der Stromrichtung)

$$(W_0)_\varepsilon = \frac{1}{\frac{1}{W_0} \cdot q - \frac{1}{w_2} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot q + \frac{1}{w_2} \cdot \frac{m-q}{m}} = \frac{w_2}{(1-q)} \frac{W_0}{W_0 + q w_2}.$$

Dabei ist jedoch wohl zu beachten, daß der Schrankenwert für den spezifischen Widerstand bei kreisförmigem Einschluß W_0 und der bei elliptischem Einschluß $(W_0)_\varepsilon$ sich nicht auf das gleiche Raumverhältnis der beiden Bestandteile beziehen. Ist z. B. $q = \frac{1}{2}$, so ist auch die Fläche der Ellipse und damit der Raumanteil ϑ_ε des elliptischen Einschlusses halb so groß wie der Raumanteil ϑ des kreisförmigen Einschlusses.

Um dies an einem Beispiel klar zu machen und gleichzeitig Anschluß an die Tabellen III bis VIII zu gewinnen, sei angenommen:

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 2, \quad \vartheta = 50 \text{ Proz.}$$

somit

$$\vartheta_\varepsilon = 25 \text{ Proz.}$$

$$(W_0)_\varepsilon^{\vartheta = 25\,\text{Proz.}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot W_0^{\vartheta = 50\,\text{Proz.}}}{W_0^{\vartheta = 50\,\text{Proz.}} + 2}.$$

Der Tabelle V entnehmen wir

$$W_0^{\vartheta = 50\,\text{Proz.}} = 1{,}447;$$

somit

$$(W_0)_\varepsilon^{\vartheta = 25\,\text{Proz.}} = \frac{4 \cdot 1{,}447}{1{,}447 + 2} = 1{,}680.$$

Wir entnehmen nun zum Vergleich gleichfalls der Tabelle V, und zwar unmittelbar, den entsprechenden oberen Schrankenwert des Widerstandes W_0 bei gleichem Raumanteil der Bestandteile, jedoch kreisförmiger Gestalt der Einschlüsse

$$W_0^{\vartheta = 25\,\text{Proz.}} = 1{,}717.$$

Der Widerstand eines Aggregates mit elliptischem Einschluß, wobei die größere Achse parallel der Stromrichtung liegt, ist bei gleichem Raumanteil der Bestandteile am Aggregate von vornherein kleiner zu erwarten als der entsprechende Widerstandswert bei kreisförmigem Einschluß. Beim Übergang aus der kreisförmigen Gestalt des Einschlusses in immer gestrecktere elliptische Formen nähert sich ja die Gesamtanordnung dem Grenzfalle der Parallelschaltung $W = \frac{2 w_1 w_2}{w_1 + w_2}$ und entfernt sich von dem Grenzfalle der Hintereinanderschaltung $W = w_1 + w_2$. Das soeben erhaltene Ergebnis läßt dies deutlich hervortreten, indem es unter sonst gleichen Umständen für ein Aggregat mit elliptischem Einschluß einen geringeren oberen Schrankenwert des Widerstandes liefert als für ein Aggregat mit kreisförmigem Einschluß.

Das Gleiche ist der Fall, wenn der eingesprengte Bestandteil der schlechtere Leiter ist. Es sei ceteris paribus

$$w_1 = 2, \quad w_2 = 1,$$

dann wird

$$(W_0)_\varepsilon = \frac{2 \cdot W_0}{W_0 + 1} = \frac{2 \cdot 1{,}429}{1{,}429 + 1} = 1{,}177$$

gegenüber dem entsprechenden Wert für kreisförmigen Einschluß (siehe Tabelle V)

$$W_0 = 1{,}204.$$

In beiden Fällen, mag der eingesprengte Bestandteil der bessere oder schlechtere Leiter sein, ergibt sich also für elliptische Gestalt der Einlagerung eine Herabsetzung des Widerstandswertes W_0 gegenüber kreisförmiger Gestalt der Einlagerung, wobei vorausgesetzt ist, daß die große Ellipsenachse mit der Stromrichtung übereinfällt. Für das im Vorausgehenden der numerischen Berechnung beispielsweise zugrunde gelegte Achsenverhältnis 1 : 2 beträgt diese Herabsetzung des Widerstandswertes durch die Exzentrizität des Einschlusses beidemal übereinstimmend 2 Proz.

Ist dagegen die große Achse der Ellipse zur Stromrichtung normal, so ist eine Erhöhung des Widerstandswertes $(W_0)_\infty$ für elliptische Gestalt des Einschlusses gegenüber dem Widerstandswert W_0 für kreisförmigen Einschluß zu erwarten. (Annäherung an Hintereinanderschaltung).

Tatsächlich ergibt sich:

$$w_1 = 1,\ w_2 = 2,\ q = 2,\ \vartheta = 12{,}5 \text{ Proz.},\quad \vartheta_\infty = 25 \text{ Proz.}$$

$$(W_0)_\infty^{\vartheta = 25\,\text{Proz.}} = \frac{2 \cdot W_0^{\vartheta = 12{,}5\,\text{Proz.}}}{4 - W_0^{\vartheta = 12{,}5\,\text{Proz.}}}$$

$$= \frac{2 \cdot 1{,}865}{4 - 1{,}865} = 1{,}747.$$

gegenüber (siehe wieder Tabelle V)

$$W_0^{\vartheta = 25\,\text{Proz.}} = 1{,}717$$

und schließlich, wenn der eingesprengte Bestandteil der schlechtere Leiter ist:

$$w_1 = 2,\quad w_2 = 1$$

bei gleichem Achsenverhältnis und gleichem Raumanteil der Einsprengung

$$(W_0)_\infty = \frac{W_0}{2 - W_0} = \frac{1{,}112}{2 - 1{,}112} = 1.227$$

gegenüber (Tabelle V)

$$W_0 = 1{,}204.$$

Für elliptische Gestalt des Einschlusses, wobei die große Achse der Ellipse zur Stromrichtung normal liegt, ergibt sich somit gegenüber kreisförmiger Gestalt der Einsprengung bei sonst gleichem Raumanteil der Bestandteile stets eine Erhöhung des Widerstandswertes W_0, mag der eingesprengte Bestandteil der besser leitende sein oder umgekehrt.

Diese Erhöhung des Widerstandswertes beträgt bei dem der numerischen Berechnung im Vorausgehenden wieder zugrunde gelegten Achsenverhältnis 1 : 2 genau ebensoviel wie die Herabsetzung des Widerstandswertes für zur Stromrichtung parallele große Achse, nämlich in beiden Fällen übereinstimmend 2 Proz.

Enthält somit das Aggregat elliptische Einsprengungen beliebiger Orientierung gegen die Stromrichtung, die regellos verteilt sind, so daß die normale Lage der großen Achse ebenso wahrscheinlich ist, wie die zur Stromrichtung parallele, so steht zu erwarten, daß sich die oben berechneten Abweichungen gegenüber dem Widerstandswert für kreisförmige Einlagerungen gleichen Raumanteils weitgehend ausgleichen. Bildet man das Mittel der Widerstandswerte für elliptische Einlagerung in den betrachteten beiden Hauptlagen gegen die Stromrichtung, so hat man:

$w_1 = 2,\quad w_2 = 1$

große Achse parallel ...	$W_0 = 1{,}177$
große Achse normal ...	$W_0 = 1{,}227$
Mittel:	1,202

Der entsprechende Widerstandswert für kreisförmige Partikel 1,204.

$w_1 = 1,\quad w_2 = 2$

große Achse parallel ...	$W_0 = 1{,}747$
große Achse normal ...	$W_0 = 1{,}680$
Mittel:	1,714

Der entsprechende Wert für kreisförmige Partikel 1,717.

Wir sehen:

Selbst bei beträchtlicher Konzentration des eingesprengten Bestandteils ($\vartheta = 25$ Proz.) und bedeutender Abweichung von der Kreisgestalt (Achsenverhältnis 1 : 2) bleibt der Widerstandswert W_0 für das Aggregat weitgehendst der gleiche wie für ein Aggregat mit kreisförmigen Einsprengungen, wenn keine Lage der Längsausdehnung der Teilchen gegen die Stromrichtung bevorzugt ist[1]).

Es ist nun die Untersuchung für den unteren Schrankenwert W_u des Widerstandes eines Aggregates mit elliptischem Einschluß anzuschließen. Das Ergebnis wird zeigen, daß die Folgerungen, die für W_0 ausgesprochen werden konnten, auch für W_u volle Geltung beanspruchen können.

B. Bestimmung des unteren Schrankenwertes W_u für Aggregate mit elliptischen Einschlußpartikeln.

Die Berechnung des Schrankenwertes W_u des Aggregatwiderstandes kann man an die Berechnung des oberen Schrankenwertes W_0 durch die folgende Überlegung anschließen. (Da sich

1) Die noch auftretenden Abweichungen (weniger als 0,2 Proz. in dem numerischen Beispiel) liegen an der Grenze der für die zahlenmäßige Auswertung herangezogenen Genauigkeit.

im Folgenden alle Größen auf Aggregate mit elliptischen Einschlüssen beziehen, ist das im Vorausgehenden als Index angewendete Unterscheidungszeichen $()_2$ gegenüber den entsprechenden Werten bei kreisförmigen Einschlüssen weggelassen.) Für den oberen Schrankenwert W_0 — entsprechend Zerlegung in Streifen in der Stromrichtung — hatten wir (vgl. Fig. 8)

$$dW_0 = \frac{l_1 w_1 + l_2 w_2}{dy},$$

$$d\lambda = \frac{1}{dW_0} = \frac{dy}{l_1 w_1 + l_2 w_2},$$

$$W_0 = \frac{1}{\int d\lambda} = \frac{1}{\int \frac{dy}{l_1 w_1 + l_2 w_2}}.$$

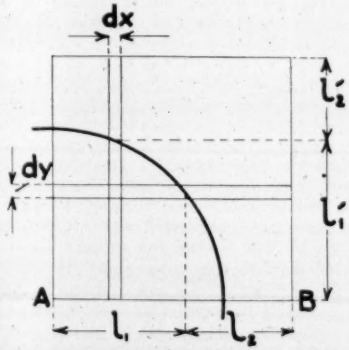


Fig. 8.

Für den unteren Schrankenwert W_u — Zerlegung in Streifen quer zur Stromrichtung — ergibt sich

$$d\lambda = \frac{1}{dW_u} = \frac{l_1'}{w_1 dx} + \frac{l_2'}{w_2 dx} = \frac{1}{w_1 w_2} \cdot \frac{l_1' w_2 + l_2' w_1}{dx}$$

$$W_u = w_1 w_2 \int \frac{dx}{l_1' w_2 + l_2' w_1} = w_1 w_2 \cdot \frac{1}{[W_0]}$$

$[W_0]$ ist der obere Schrankenwert eines Elementargebietes, in dem

1. die Lage der Einsprengung um 90^0 gedreht ist.

2. die Werte w_1 und w_2 der Widerstände der Einsprengung und der Muttersubstanz vertauscht sind.

Wir behandeln wieder ein zu dem vorigen analoges numerisches Beispiel:

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 2$$

große Achse parallel zur Stromrichtung; $\vartheta = 25$ Proz.

$$W_u = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{1{,}227} = 1{,}630$$

gegenüber 1,667 für kreisförmigen Einschluß.

Die Differenz $= -0{,}037$ entspricht 2 Proz. Unterschied.

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 2$$

große Achse normal zur Stromrichtung; $\vartheta = 25$ Proz.

$$W_u = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{1{,}177} = 1{,}700$$

gegenüber 1,667 für kreisförmigen Einschluß.

Die Differenz $= +0{,}033$ entspricht wieder 2 Proz. Unterschied.

Es zeigt sich auch für den Widerstandswert W_u, genau ebenso, wie im Vorausgehenden für den Widerstandswert W_0 gefunden worden ist:

Elliptische Einsprengung mit der Längsrichtung der eingesprengten Partikel in der Stromrichtung setzt den Aggregatwiderstand, verglichen mit dem bei kreisförmiger Einsprengung, herab; elliptische Einsprengung quer zur Stromrichtung vergrößert ihn. Die beiden, durch die Ellipsenexzentrizität hervorgerufenen Abweichungen sind quantitativ von gleicher Größe, so daß bei gleichberechtigtem Vorhandensein von elliptischen Partikeln beider betrachteten Lagen im Aggregat die Widerstandswerte W_u ebenso wie W_0 genau gleich denen bei kreisförmiger Gestalt der eingesprengten Partikel sind.

Der Vollständigkeit halber und zum Vergleich mit dem Vorigen seien zum Schluß auch die Werte von W_u angegeben, wenn der eingesprengte Bestandteil der schlechtere Leiter ist.

$$w_1 = 2, \quad w_2 = 1$$

große Achse normal zur Stromrichtung, Raumanteil $\vartheta = 25$ Proz. analog wie früher.

$$W_u = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1{,}680} = 1{,}190.$$

$$w_1 = 2, \quad w_2 = 1$$

große Achse parallel zur Stromrichtung.

$$W_u = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1{,}747} = 1{,}145.$$

Demgegenüber ergibt sich 1,166 laut Tabelle V für kreisförmige Einsprengung unter sonst gleichen Umständen. Die Differenz beträgt somit:

im ersteren Falle $+0{,}024$
im letzteren Falle $-0{,}021$,

somit wieder zwei sich entgegenwirkende Abweichungen von 2 Proz. des gesamten Betrages gegenüber kreisförmiger Gestalt der eingesprengten Teilchen.

(Fortsetzung folgt.)

Bemerkungen über Serienspektren, an deren Emission mehr als ein Elektron beteiligt ist. (Nachtrag.)

Von Gregor Wentzel.

In einer Arbeit obigen Titels[1]) diskutierte der Verf. unter anderem die sog. gestrichenen Terme der Erdalkalispektren, ausgehend von der Bohr-Franckschen Vorstellung, daß die ihnen entsprechenden Atomzustände durch Anregung beider Valenzelektronen zustande kämen; das zweite Valenzelektron sollte sich etwa in einer 3_3-Bahn befinden anstatt in einer 4_1-Bahn, wie bei den gewöhnlichen (ungestrichenen) Termen. Es wurde daraus die Folgerung gezogen, daß die Serien mp', md', falls sie existieren, eine andere Seriengrenze haben müssen als die gewöhnlichen Serien mp, md. Die beiden Seriengrenzen ($\varkappa p$, $\varkappa p'$) entsprechen nämlich verschiedenen Zuständen des positiven Ions; einmal befindet sich das übrig gebliebene Valenzelektron in einer 4_1-Bahn, das andere Mal in einer 3_3-Bahn. Die Differenz der Seriengrenzen sollte danach gleich einer Termdifferenz des Funkenspektrums sein:

$$\varkappa p - \varkappa p' = 1s^+ - 3d^+.$$

Der Verf. kannte damals nur zwei p'-Terme und einen d'-Term, entsprechend den bekannten Gruppen (pp') und (dd') von Rydberg und Götze, und es war zweifelhaft, ob die beiden p'-Terme zur gleichen Serie gehörten (oder ob nicht etwa eine dritte Lage (4_2) des zweiten Serienelektrons in Frage käme). Inzwischen ist von A. del Campo[2]) bei Ca eine dritte Gruppe (pp') analysiert worden, und es hat den Anschein, daß sie mit den beiden Götzeschen Gruppen (pp') serienmäßig zusammengehört. Die entsprechenden Termgrößen, bezogen auf die Seriengrenze $\varkappa s = \varkappa p = \varkappa d = 0$, sind rund:

$2p' = 10800$, $3p' = 750$, $4p' = -5000\,\mathrm{cm}^{-1}$.

Die Numerierung der p'-Terme deutet an, daß wir sie als konsekutive Glieder einer Serie auffassen, welche Annahme sich im folgenden bewähren wird. Das negative Vorzeichen des Del Camposchen Terms entspricht unserer Erwartung, daß die den höheren Seriengliedern p' zugehörenden Atomzustände sehr wohl höhere Energie haben können als der 4_1-Zustand des Ca+-Ions. Nun kann man aus den drei Seriengliedern $2p'$, $3p'$, $4p'$ nach der Ritzschen Formel

$$mp' + g = \frac{R}{[m + a + \alpha(mp' + g)]^2}$$

die Seriengrenze g extrapolieren. Man erhält:

$$g = 1{,}37 \cdot 10^4\,\mathrm{cm}^{-1},\quad a = -0{,}760,$$
$$\alpha = 3{,}57 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{cm}.$$

Der Wert $g = \varkappa p - \varkappa p' = 13700\,\mathrm{cm}^{-1}$ stimmt aber genau mit der Termdifferenz $1s^+ - 3d^+$ des Ca-Funkenspektrums überein, was unsere Deutung der Götze-Del Camposchen Terme schlagend bestätigt. Der Term $5p'$ ist nach der Ritz-Formel bei $-8130\,\mathrm{cm}^{-1}$ zu erwarten.

Die Kombinationen $2p - 3p'$, $2p - 4p'$ lehren, daß gleichzeitige Übergänge beider Serienelektronen gar nicht selten sind. Bemerkenswerterweise lassen sich aber in den Erdalkalispektren keine Kombinationen vom Typus (pd') oder $(p'd)$ nachweisen; sondern immer nur (pp') und (dd'). D. h. der innere Sprung $3_3 \to 4_1$ findet nur statt, wenn die äußere Bahn ihr Azimutalquantum k beibehält. O. Laporte[1]) hat diese Auswahlregel $\Delta k = 0$ in den komplizierten Spektren von V und Fe in ausgedehntestem Maße bestätigt gefunden. Dagegen gilt sie nicht bei Neon, wo Paschens Ritzsche und Nicht-Ritzsche Terme nach der gewöhnlichen Regel $\Delta k = \pm 1$ kombinieren. Vielleicht kann man diese beiden Tatsachen auf eine gemeinsame Formel bringen, indem man sagt: Wenn 2 (N) Elektronen springen, muß Δk im Mittel für jedes Elektron gleich 1 sein, d. h. insgesamt $\Delta k = 2\,(N)$. In der Tat ist bei Ca usw. $\Delta k = 2 + 0 = 2$, bei Ne $\Delta k = 1 + 1 = 2$.

Von diesem Gesichtspunkt aus möge noch die Möglichkeit erörtert werden, daß das zweite Valenzelektron bei der Anregung statt in die 3_3-Bahn in die energetisch noch höherwertige 4_2-Bahn gelangt; die zugehörigen Terme wollen wir durch zwei Akzente kennzeichnen. Führt nun das zweite Elektron Übergänge $4_2 \to 4_1$ oder $4_2 \to 3_3$ ($\Delta k = 1$) aus, so werden wir nach unserer Regel für das erste Elektron gleichfalls Übergänge $\Delta k = 1$ erwarten, d. h. Kombinationen nach der gewöhnlichen Auswahlregel von folgenden Typen:

$$(s''p),\ (sp''),\ (p''d),\ (pd''),\ (d''f) \ldots.$$
$$(s''p'),\ (s'p''),\ (p''d'),\ (p'd''),\ (d''f') \ldots.$$

Wir sind geneigt, den in den Tabellen von Paschen-Götze[2]) aufgeführten Ca-Term $3p'_i \simeq 10000\,\mathrm{cm}^{-1}$, welcher mit $2s$ und $3d$ kombiniert, als Term $2p''$ (beide Valenzelektronen in 4_2-Bahnen) anzusprechen. Daß die Termdifferenz $2p - 2p'' \simeq 24000\,\mathrm{cm}^{-1}$ beinahe gleich der Funkenfrequenz $1s^+ - 2p^+ \simeq 25000\,\mathrm{cm}^{-1}$

1) Phys. Zeitschr. **24**, 104, 1923.
2) Trabajos del Laboratorio fisico, Nr. 68, Madrid 1923. Schema [3], s. S. 43.

1) Zeitschr. f. Phys. **23**, 135, 1924.
2) Seriengesetze der Linienspektren. Berlin 1922, S. 75, 76.

ist, spricht für unsere Auffassung, welche die Gleichung

$$\varkappa p - \varkappa p'' = 1s^{+} - 2p^{+}$$

fordert. Vielleicht kann man auch eine von del Campo[1]) mitgeteilte Liniengruppe bei $\lambda = 6500$ Å als Kombination $2p - 3d''$ deuten.

Bohr und Franck haben die Vermutung geäußert, daß die große Intensität der Gruppe $2p - 2p'$ (Fraunhofers G) durch die Metastabilität des $3d$-Terms von Ca^{+} bedingt sei. Doch ist das metastabile Ion sicher keine notwendige Bedingung für das Auftreten „gestrichener" Terme überhaupt, wie z. B. das *Be*- und *Mg*-Spektrum lehrt. Vermutlich hängt die Wahrscheinlichkeit, mit der solche Terme angeregt werden, im wesentlichen nur von der Größe der Anregungsarbeit ab.

1) l. c., S. 43, Schema [10]. Die Linie $\nu = 15381{,}19$ steht, wenn sie überhaupt in das Schema hineingehört, vermutlich nicht am richtigen Platz.

München, Institut für theoretische Physik.

(Eingegangen 14. März 1924.)

Über eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation.

Von E. Anding.

1. Es ist ein naheliegender Gedanke, zu fragen, welche Folgen in der Bewegung der Planeten eintreten müßten, wenn sich die Gravitation mit einer endlichen Geschwindigkeit fortpflanzen würde. Besonders heutzutage. Aber sonderbarerweise ist die Frage bis jetzt noch nicht behandelt worden.

Was Laplace im vierten Bande der Méc. cél. (Buch 10, Kap. 7, Art. 22) unter dieser Überschrift ausgeführt hat, ist etwas ganz anderes: er nimmt an, die Gravitation entstände, indem eine äußerst dünne Materie mit äußerst großer Geschwindigkeit von außen gegen die Sonne hinströmte. Dann entsteht allerdings als Stoßwirkung auf einen Planeten die Gravitation, aber infolge der Relativbewegung gegen den Planeten zugleich auch eine Seitenkomponente, und diese ist es, welche er berechnet: eine Art von Widerstandswirkung also. Die Grundvorstellung hat sonst mit dem Monumentalwerk keinen Zusammenhang.

Eine andere Lösung hat Lehmann-Filhés gegeben, aber sie hängt zusammen mit der Bewegung der Sonne durch den Weltraum, und beruht nicht auf der Relativbewegung der Planeten gegen die Sonne oder den Schwerpunkt des Sonnensystems.

2. Spricht man heute von einer Fortpflanzung der Gravitation, so ist der natürlichste Gedanke doch wohl der, daß von der Sonne aus sich nach allen Seiten ein Zustand fortpflanze, welcher die Eigenschaft hat, einem Planeten, über den er hinwegschreitet, einen Impuls zu verleihen, der gegen die Sonne hin gerichtet ist. Daß die Fortpflanzungsrichtung der Erregung und die Richtung der Impulswirkung entgegengesetzten Sinn haben, darf keinen Einwand bilden. Denn beides sind verschiedene Begriffe. Auch gibt es konkrete Beispiele, wo gerade dieses Verhalten physikalisch realisiert ist. Doch unterlasse ich absichtlich, sie anzuführen, um das Mißverständnis auszuschließen, als wolle ich damit etwa eine Entstehungsweise der Gravitation begründen.

Ein Planet also, der sich in der Entfernung r befindet, wird während der Zeit dt in radialer Richtung überschritten von einer Strecke der Erregung, welche die Länge $c\,dt$ besitzt. Hat aber der Planet selbst eine radiale Bewegungskomponente, so ist die Dicke der ihn überholenden Zone nur $c\,dt - dr$. Mithin verkleinert sich die Gravitation im Verhältnis des letzteren Inkrementes zum vorigen; also es bestehen die Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\mu\cdot\frac{x}{r^3} + \frac{\mu}{c}\cdot\frac{x}{r^3}\frac{dr}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\mu\cdot\frac{y}{r^3} + \frac{\mu}{c}\cdot\frac{y}{r^3}\frac{dr}{dt} \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

welche zu integrieren sind.

Erste Art der Behandlung.

3. Für die Gleichungen (1) gilt zwar das Prinzip der Flächen:

$$r^2\frac{du}{dt} = f \qquad (2)$$

(wo f die Integrationskonstante bedeutet), aber statt des Prinzips der lebendigen Kraft würde man, wieder in Polarkoordinaten, erhalten:

$$d\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right] = -2\mu\frac{1}{r^2}dr + 2\frac{\mu}{c}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}dr. \qquad (3)$$

Eliminiert man hier mittels (2) das Inkrement dt:

$$f^2\cdot d\left[\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{du}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] = -2\mu\frac{1}{r^2}dr + 2\frac{\mu f}{c}\frac{1}{r^4}\frac{dr}{du}dr$$

führt die neuen Variablen ein

$$x = \frac{1}{r} \qquad y = \frac{dx}{du} \qquad (4)$$

(die also nichts zu tun haben mit den rechtwinkligen Koordinaten in (1), die fortan nicht

mehr auftreten), und statt f und c die neuen Konstanten:

$$h = \frac{\mu}{f^2} = \frac{1}{p} \qquad \varepsilon = \frac{hf}{c} \tag{5}$$

so wird die Gleichung (3) zu

$$\mathrm{d}(y^2 + (x-h)^2) = 2\varepsilon \cdot y\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

oder mit Ausführung der Differentiation zu

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{x-h}{y} = \varepsilon,$$

so daß nach der Substitution

$$z = \frac{y}{x-h} \tag{7}$$

die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{x-h} + \frac{z\,\mathrm{d}z}{1 - \varepsilon z + z^2} = 0 \tag{8}$$

zu behandeln ist.

4. Ist nun speziell $\varepsilon = 0$, so muß sich hieraus die Keplersche Bewegung ergeben. Am einfachsten würde man hierzu an die Gleichung (6) anknüpfen; aber im Hinblick auf das folgende gehen wir gerade von (8) aus, integrieren bei $\varepsilon = 0$:

$$\log(x-h) + \frac{1}{2}\log(1+z^2) = \log he,$$

wo rechts die Integrationskonstante steht, erhalten durch Einsetzen von (7):

$$(x-h)^2 + y^2 = h^2e^2,$$

durch Einsetzen von y nach (4)

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right)^2 = h^2e^2 - (x-h)^2 \tag{9a}$$

und jetzt durch abermalige Integration (wobei man die Wurzel negativ zu nehmen hat)

$$x - h = he\cos(u - u_0) \tag{10a}$$

wo u_0 die Integrationskonstante bedeutet. Dies ist aber wegen der ersten Gleichung in (4) und in (5) die Keplersche Ellipse:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(u - u_0)}.$$

5. Ist ε von Null verschieden, so gehen wir den soeben im Spezialfall vorgezeichneten Weg: durch Integration von (8) folgt

$$\log(x-h) + \tfrac{1}{2}\log(1 - \varepsilon z + z^2) + \\ + \frac{\varepsilon}{\sqrt{4-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2z-\varepsilon}{\sqrt{4-\varepsilon^2}} = \log he$$

(wo rechts wieder die Integrationskonstante steht) und hieraus, indem man z nach (7) und dann y nach (4) einsetzt:

$$\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right)^2 - \varepsilon(x-h)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} + (x-h)^2\right] e_1^{\frac{2\varepsilon}{\sqrt{4-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\sqrt{4-\varepsilon^2}}\frac{1}{x-h}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{4-\varepsilon^2}}\right)} = h^2e^2 \tag{9}$$

wo e_1 für den Augenblick die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnen möge.

Es hat sich also eine transzendente Differentialgleichung ergeben, welche der einfachen Gleichung (9a) entspricht.

6. Um hieraus das Bahnintegral zu erhalten, welches (10a) entsprechen würde, läge es nahe, im Exponenten von (9), wo doch ε eine sehr kleine Größe sein wird, die Ausdrücke (9a) und (10a) als erste Näherungen einzuführen. Dadurch nimmt, indem man überhaupt die zweite Potenz von ε vernachlässigt, der Exponent die einfache Form an:

$$-\varepsilon(u - u_0),$$

aber in der Differentialgleichung, die man auf diese Weise erhält:

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right)^2 - \varepsilon\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\cdot(x-h) + (x-h)^2 = \\ = h^2e^2\cdot(1 + \varepsilon(u - u_0))$$

lassen sich die Variablen nicht trennen.

7. In diesem Zusammenhange beweisen wir zunächst, daß eine Perihelbewegung nicht vorliegt.

Hierzu gehen wir von der Gleichung (9) aus, wo die Variablen getrennt sind, setzen zur Vereinfachung der Schreibweise

$$\varrho = \frac{x-h}{he} \tag{10}$$

und lassen auch hier ε^2 und die höheren Potenzen fort. So ist jetzt die Gleichung zu integrieren

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}u}\right)^2 + \varrho^2 = 1 - \varepsilon\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}u} - \varrho\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}u}\right). \tag{11}$$

Nun besagt eine „säkulare" Perihelbewegung, daß statt der Gleichung

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(u - u_0)}$$

der Faktor von u sich um eine kleine Größe σ von der Einheit unterscheidet, also

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(u - u_0 + \sigma u)} \\ = \frac{p}{1 + e\cos(u - u_0) - e\sigma\cdot u\cdot\sin(u - u_0)}.$$

Mit (4), (5) und (10) wird dies

$$\varrho = \cos(u - u_0) - \sigma\cdot u\cdot\sin(u - u_0)$$

und es ist die Unbekannte σ durch Einsetzen dieses Ausdrucks in (11) zu bestimmen. Auf der rechten Seite von (11) genügt es, beim

ersten Glied $\varrho = \cos(u - u_0)$ stehen zu bleiben; sie wird

$$R = 1 + \varepsilon \cdot (u - u_0) - \varepsilon \cdot \sin(u - u_0) \cos(u - u_0). \qquad (11_R)$$

In die linke aber setzt man das obige ϱ und

$$\frac{d\varrho}{du} = -\sin(u - u_0) - \sigma \cdot \sin(u - u_0) - \sigma \cdot u \cdot \cos(u - u_0)$$

und erhält bei Vernachlässigung des Quadrats von σ:

$$\left(\frac{d\varrho}{du}\right)^2 + \varrho^2 = 1 + \sigma - \sigma \cdot \cos 2(u - u_0). \qquad (11_a)$$

Vergleicht man aber in (11_R) und (11_a) die Koeffizienten gleicher Funktionen von $(u - u_0)$, so folgt, was zu beweisen war, daß

$$\sigma = 0.$$

8. Wie wir bis jetzt dem Element u_0 ein säkulares Glied beigegeben haben, so machen wir diese Hypothese jetzt auch mit den Elementen p und e. Nach unserem Ergebnis dürfen wir dabei

$$u - u_0 = v \qquad (12)$$

schreiben, so daß v vom Perihel gezählt ist. Indem man in der Ellipsengleichung

p durch $\dfrac{p}{1 + \eta \cdot v}$ und e durch $e(1 + \varepsilon' \cdot v)$

ersetzt, folgt

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v + \eta \cdot v + e(\eta + \varepsilon') \cdot v \cos v}$$

und wieder mit (4), (5) und (10):

$$\varrho = \cos v + \frac{\eta}{e} v + (\eta + \varepsilon') \cdot v \cos v,$$

$$\frac{d\varrho}{dv} = -\sin v + \frac{\eta}{e} - (\eta + \varepsilon') \cdot v \sin v + (\eta + \varepsilon') \cdot \cos v$$

und mithin wird die linke Seite von (11):

$$\left(\frac{d\varrho}{dv}\right)^2 + \varrho^2 = 1 - 2\frac{\eta}{e} \cdot \sin v + 2\frac{\eta}{e} \cdot v \cos v + 2(\eta + \varepsilon') \cdot v - 2(\eta + \varepsilon') \cdot \sin v \cos v). \qquad (11_L)$$

Vergleicht man dies wieder mit (11_R), so folgt

$$\eta = 0 \qquad \varepsilon' = \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

und die Gleichung der Bahn wird

$$r = \frac{p}{1 + e(1 + \frac{1}{2}\varepsilon \cdot v) \cdot \cos v}. \qquad (13)$$

Die Gleichung (13) entspricht der Gleichung (10a) als drittes Integral von (1). Hiernach bleibt der Parameter konstant, aber die Exzentrizität wächst unaufhaltsam, bis sie die Einheit erreicht. Weiter steigt sie nicht, weil sich die wahre Anomalie dann nicht mehr erheblich ändert; sondern der Punkt verliert sich schließlich auf einer parabelnahen Bahn ins Unendliche.

9. Es fragt sich nunmehr, in welcher Zeitdauer sich die Umwandlung der Bahn vollzieht. Hierzu ist statt v die Zeit einzuführen, was sehr leicht geschehen kann, da nach (2) der Flächensatz fortbesteht. Nach (5) wird er

$$dt = \frac{r^2 dv}{\sqrt{\mu p}}$$

und indem man den Ausdruck (13) einführt, folgt

$$dt = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \frac{dv}{(1 + e(1 + \frac{1}{2}\varepsilon \cdot v)\cos v)^2}.$$

Sagen wir nun, der Planet vollziehe den

ersten zweiten dritten ... Umlauf

jedesmal von $v = -\pi$ bis $v = +\pi$ mit der konstanten Exzentrizität

$$e_i = e \qquad e + e\varepsilon\pi \qquad e + 2 \cdot e\varepsilon\pi \ \ldots$$

so haben wir, wie der Differentialausdruck zeigt, im Integral erst die zweite Potenz von ε vernachlässigt, und da

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dv}{(1 + e_i \cos v)^2} = \frac{2\pi}{(1 - e_i^2)^{3/2}}$$

so wird die Zeitdauer des Umlaufs mit der Nummer i

$$T_i = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \frac{1}{(1 - e_i^2)^{3/2}} \cdot 2\pi,$$

gemessen in astronomischen Zeiteinheiten, und mithin die Summe aller dieser Umlaufszeiten

$$\Sigma T_i = \frac{2}{e\varepsilon} \cdot \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \sum_{i=0}^{i} \frac{1}{[1 - (e + i \cdot e\varepsilon\pi)^2]^{3/2}} e\varepsilon\pi.$$

Gehen wir hier von der Summe mit Hilfe der Mac Laurinschen Summenformel auf das Integral über, indem wir dx für $e\varepsilon\pi$ und x für $e + i \cdot e\varepsilon\pi$ schreiben, so kämen zum Integral, der genannten Formel zufolge, zunächst noch 2 Korrektionsglieder, die halben Integranden für $i = 0$ und $i = i$. Diese Glieder aber bringen wir dadurch zum Wegfall, daß wir die zu bestimmende Größe etwas anders definieren, indem wir beim ersten Umlauf die Werte $v < 0$ und beim letzten die Werte $v > i \cdot 2\pi$ ausschließen. Dies hat zugleich die bequeme Wirkung, daß die i fortan nicht mehr Nummern sind, sondern Maßzahlen. Die folgenden Korrektionsglieder, mit den Bernoullischen Zahlen, bringen zum mindesten den Faktor ε^2.

Der Planet braucht also, damit sich seine Exzentrizität vom anfänglichen Betrag e auf

$e_i = e + i \cdot e\varepsilon\pi$ erhöhe, i Umläufe, welche einen Zeitraum erfordern

$$t_i - t = \frac{2}{e\varepsilon} \cdot \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \cdot \left(\frac{e_i}{\sqrt{1 - e_i^2}} - \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \right).$$

Führt man die anfängliche Umlaufszeit ein

$$T = 2\pi \cdot \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} = 2\pi \cdot \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{(1 - e^2)^{3/2}} \qquad (14)$$

so wird unser Resultat:

$$\frac{t_i - t}{T} = \frac{1 - e^2}{\pi\varepsilon} \cdot \left(\frac{e_i}{\sqrt{1 - e_i^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} - 1 \right). \qquad (15)$$

10. Wir machen eine Anwendung auf den Planeten Merkur. Nach Leverrier ist für 1850,0

$$e = \sin 11^0\,51'\,53'',7 \quad \log a = 9{,}587821 - 10$$
$$\log p = 9{,}569063 - 10.$$

Auch setzen wir die Geschwindigkeit der Gravitation gleich der des Lichts. Dann ist astronomischen Einheiten der Strecken und der Zeit

$$c = 173{,}3$$

und hieraus folgt nach (5)

$$\varepsilon = 163{,}0 \cdot 10^{-6}.$$

Fragen wir zunächst, innerhalb welcher Zeit sich die Exzentrizität verdoppelt, dann ist zu setzen $e_i = 2e$ und die Formel (15) sagt, daß hierzu 2146 Umläufe der anfänglichen Dauer erforderlich wären. Da

$$T = 0{,}2408 \text{ in Julianischen Jahren,}$$

so würde sich e verdoppeln in

516,7 Jahren.

11. Fragen wir umgekehrt, wieviel e in 100 Jahren zunimmt, so ist auf der linken Seite von (15) die 100jährige Anzahl der Umläufe jetziger Dauer zu setzen = [2,61826], und da der Außenfaktor rechter Hand = [3,27189] (wo die eckigen Klammern die Logarithmen der Zahlen enthalten), so wird $e_i = 0{,}24867$. Da $e = 0{,}20560$, so ist die Zunahme in 100 Jahren 0,04307. Multipliziert man diese Zahl mit 206264,8, so wird die Zunahme in e'' in 100 Jahren

8883''.

Dies ist die Zahl, welche vergleichbar wäre mit der Angabe, die von Newcomb als säkulare Änderung angeführt wird. Er findet den Unterschied zwischen der theoretischen und der beobachteten Exzentrizität in 100 Jahren

$$-0'',88.$$

Das ist der zehntausendste Teil, aber was noch wichtiger ist: mit dem entgegengesetzten Vorzeichen!

Zweite Lösung.

12. Da der Frage ein allgemeines Interesse zukommt, so ist sie im vorstehenden einfach auf direktem Wege behandelt worden. Mit den Störungsformeln, die dem Astronomen geläufig sind, läßt sie sich in wenigen Strichen erledigen.

Wirkt in der Richtung des Radiusvektors außer der gegenseitigen Anziehung des Planeten und der Sonne noch eine Kraft (S), so bestehen die Differentialgleichungen der oskulierenden Elemente (z. B. Tisserand, Méc. cél. I, S. 433):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \cdot \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot \sin v \cdot (S) \\
e\frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= \frac{1}{na} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \cos v \cdot (S) \\
\frac{d\varepsilon'}{dt} &= -\frac{2}{na} \cdot \frac{r}{a} \cdot (S) - \\
&\quad - \frac{1}{na} \frac{\sqrt{1 - e^2}\,(1 - \sqrt{1 - e^2})}{e} \cdot \cos v \cdot (S) \\
\frac{de}{dt} &= \frac{1}{na} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin v \cdot (S).
\end{aligned} \qquad (16)$$

Hier bedeutet v die wahre Anomalie, $\tilde{\omega}$ die Perihellänge, die vorhin mit u_0 bezeichnet wurde; die mittlere Länge aber, zur Zeit der Epoche, ist mit ε' bezeichnet worden, weil der gewöhnlich benutzte Buchstabe ε hier schon vergeben ist.

13. Handelt es sich nun speziell um die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation, so ist nach Art. 2

$$(S) = +\frac{\mu}{c} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt}$$

und da in (16) rechts alles auf die Variable v gebracht ist, so tun wir dies auch in (S). Es ist

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} = -\frac{1}{p}\frac{d\left(\frac{p}{r}\right)}{dt} = -\frac{e}{p}\frac{d\cos v}{dt} = \frac{e}{p}\sin v \frac{dv}{dt}$$

und nach (5):

$$\frac{\mu}{c} = \varepsilon f = \varepsilon\sqrt{\mu p} = \varepsilon \cdot na \cdot \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Mithin wird

$$(S) = \varepsilon \cdot na \cdot \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot \sin v \frac{dv}{dt} \qquad (17)$$

und wenn man dies in (16) einsetzt, so erscheint dort statt t durchweg die willkürliche Variable v eingeführt.

14. So erhalten wir für die Exzentrizität die äußerst einfache und doch strenge Gleichung:

$$de = \varepsilon e \cdot \sin^2 v\, dv \qquad (18)$$

welche aussagt, daß die Exzentrizität für einen vollen Umlauf um genau genug $e\varepsilon\pi$ zunimmt, was mit Art. 9 übereinstimmt. Streng integriert gibt sie

$$e_i = e \cdot e_1^{\,{}^1/_2 \varepsilon v - {}^1/_4 \varepsilon \cdot \sin 2v}$$

und es ist mithin nach i Umläufen die säkular veränderte Exzentrizität

$$e_i = e \cdot e_1^{i \cdot \pi \varepsilon} \tag{19}$$

wo e die anfängliche Exzentrizität und e_1 die Basis der natürlichen Logarithmen bedeuten möge, um mit der Bezeichnung in Art. 10 und 11 in Einklang zu bleiben.

15. Die Veränderung der großen Halbachse a ergibt sich aus der ersten der Gleichungen (16). Einfacher ist es, diese durch die letzte Gleichung dort zu dividieren:

$$\frac{da}{a} = 2e \frac{de}{1 - e^2}. \tag{20}$$

Strenge Integration ergibt

$$a_i = a \frac{1 - e_i^2}{1 - e_i^{2}}, \tag{21}$$

wodurch sich das Resultat von Art. 8 bestätigt, daß nämlich der Parameter konstant bleibt.

16. Die zwei noch übrigen Elemente erleiden keine säkularen Veränderungen. Denn man erhält

$$d\tilde{\omega} = -\varepsilon \cdot \sin v \cos v \cdot dv \tag{22}$$

und

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon' = &-2\varepsilon \cdot e\sqrt{1 - e^2} \frac{\sin v}{1 + e \cos v} dv - \\ &- \varepsilon(1 - \sqrt{1 - e^2}) \sin v \cos v \, dv. \end{aligned}\right| \tag{23}$$

Alles in Übereinstimmung mit dem früheren.

Ergebnis.

17. Die Anomalie in der Bewegung des Merkur-Perihels hat Veranlassung gegeben, daß man entweder hypothetische Massen einführte, die man ohnedies nicht in Betracht gezogen hätte, oder daß man am Newtonschen Gravitationsgesetz Erweiterungen oder eine Veränderung vornahm.

Um hierbei sicher zu gehen, ist es erforderlich, daß man Stellung nimmt zu derjenigen logischen Möglichkeit, von welcher der hier vorliegende Aufsatz ausging. Das Ergebnis der Betrachtung ist nun:

1. Eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation wäre eine überflüssige Hypothese; denn sie hat auf die Perihelbewegung keinen Einfluß.

2. Noch mehr: sie ist eine sachlich unmögliche Hypothese, denn sie würde, so groß die Geschwindigkeit auch sein würde, solche säkularen Veränderungen der Exzentrizität zur Folge haben, denen die Beobachtungen auf das bestimmteste widersprechen.

Mit einem Wort: Die Bahn ist frei für andere Erklärungen.

Gotha, 8. August 1923.

(Eingegangen 23. März 1924.)

Bemerkungen zu dem Artikel von Hans Kienle „Kosmische Refraktion" (Physik. Zeitschr. 25, 1—6, 1924.)

Von L. Courvoisier.

Der Artikel von Herrn Kienle ist mir erst am 31. März zu Gesicht gekommen, deshalb erfolgt diese Entgegnung so spät. Ich halte sie für nötig wegen einer Reihe von Irrtümern, Widersprüchen und Entstellungen, die sich in der genannten Arbeit vorfinden, auf die ich hier aber nur mit einigen allgemeinen Bemerkungen eingehen kann.

1. In meinen bisherigen Publikationen über die beobachtete Erscheinung glaubte ich genügend betont zu haben, daß es mir zunächst nur auf die Tatsache, nicht auf ihre physikalische Deutung ankommt. Wenn trotzdem Herr Kienle, nach einigen Wendungen in seinem Aufsatz zu schließen, das Gegenteil annimmt, so muß ich hier wiederholen, daß mir die kosmische Erklärung lediglich als Arbeitshypothese gedient hat.

2. Bei der vorliegenden Erscheinung kann selbstverständlich nur die Bearbeitung einer großen Masse von Beobachtungen im allgemeinen ein Urteil über den systematischen Charakter ihrer Resultate herbeiführen. Es geht daher nicht an, daß der Kritiker einzelne, vielleicht gerade besonders unsichere, Beobachtungsreihen herausgreift, um an ihnen gewissermaßen die geringe Vertrauenswürdigkeit des ganzen Materials nachzuweisen. So sind von Herrn Kienle z. B. die große Effekte liefernden α-Beobachtungen der Venus in oberer Konjunktion nach 1917 und ebenso die vielen früheren Beobachtungen des Planeten in Greenwich, Paris und Washington, ferner die ersten δ-Beobachtungen heller Fixsterne, die genauen Zenitsternbeobachtungen, die Polsternbeobachtungen, einfach übergangen, dafür aber unter anderm meine Venusbeobachtungen in δ angeführt worden, die ich ausdrücklich nur als Versuch bezeichnet habe.

3. Es wird einesteils gegen mich der Vorwurf erhoben, ich wäre bei der ersten Behandlung der Beobachtungen zu summarisch verfahren, indem ich die gebildeten Mittelwerte nicht einer Ausgleichung unterworfen hätte, andernteils, mein Standpunkt sei nicht ganz unvoreingenommen, insofern als ich auch weiterhin den Effekt unabhängig von der — übrigens durchaus nicht der Refraktionstheorie, sondern einfach den zuerst gefundenen Ablenkungen angepaßten — empirischen Formel hätte untersuchen müssen. Ich bin natürlich summarisch vorgegangen, weil es bei einem ersten Überblick gar nicht anders möglich war und weil wegen

der Unsicherheit mancher Beobachtungsreihen sich nur eine Überschlagsrechnung lohnte. Erst nach Aufstellung der empirischen Formel konnten einige dazu geeignete Messungen auch durch Ausgleichung ausgewertet werden. Herr Kienle dagegen gleicht, im Widerspruch zu seiner eigenen Forderung, sofort nach der a posteriori gefundenen Formel die ursprünglichen Beobachtungen aus.

4. Vor allem muß hier ein fundamentaler Irrtum des Verfassers berichtigt werden, der, wie es scheint, auf seine ganze Urteilsbildung in der behandelten Frage von maßgebendem Einfluß gewesen ist. Er behauptet nämlich, es seien von mir bei der Reduktion der Heidelberger α-Beobachtungen der Venus, wegen der Unsicherheit der graphischen Interpolation des Uhrstandes für Venus aus den Tagesbeobachtungen der Anhaltssterne, diese letzteren kürzerhand verworfen und an ihre Stelle Nachtbeobachtungen gesetzt worden. Das ist selbstverständlich nicht der Fall gewesen. Es wurden lediglich die Uhrgänge aus den gewöhnlichen Zeitbestimmungen herangezogen, um den Mittelwert des Uhrstandes aus den beobachteten — durchschnittlich fünf — Anhaltssternen eines Tages auf die Durchgangszeit der Venus zu übertragen. Da die Anhaltssterne immer derselben Gruppe von acht Ursa major-Sternen angehörten, so sind also gerade die Heidelberger Beobachtungen in systematischer Hinsicht so einwandfrei wie möglich angelegt, während dies bei den von Herrn Kienle als Muster angeführten Beobachtungen Kępińskis nicht zutrifft, indem dort verschiedene Gruppen von — zudem noch ungünstig gelegenen — Anhaltssternen vor und nach der Konjunktion verwendet wurden. Das hätte Herr Kienle bei etwas genauerer Lektüre meines Aufsatzes (A. N. **202**, 369) ohne weiteres erkennen müssen. Die Sachlage ist also gerade umgekehrt wie in seiner Darstellung: die Heidelberger Beobachtungen sind grundsätzlich die vertrauenswürdigeren, es liegt nicht der mindeste Anlaß vor, sie den anderen Messungsreihen gegenüber auszuschließen, und damit entfallen natürlich auch alle vom Verfasser gezogenen Folgerungen, wie z. B., daß keine funktionelle Abhängigkeit des Effektes vom Sonnenabstande zu erkennen sei.

5. Wenn man ihrer Natur nach unsichere Beobachtungsreihen nach zwei verschiedenen Rechenverfahren auswertet, also etwa wie hier ursprünglich mittels einer für genügend erachteten Überschlagsrechnung, und hernach durch mehr oder weniger strenge Ausgleichung, so wird man selbstverständlich stets zu etwas verschiedenen numerischen Resultaten gelangen. Solche zufälligen Unterschiede besagen aber schwerlich etwas gegen den Charakter der abgeleiteten Erscheinung. Ich glaube kaum, daß man von den Zahlenwerten, die Herr Kienle auf für mich z. T. unkontrollierbarem Wege findet, den Eindruck bekommt, als seien sie dem Sinne nach andere als die meinigen.

6. Herr Kienle erklärt am Schlusse seiner Kritik kurzweg, der Effekt sei ein durch die Art der Beobachtung bedingter systematischer Fehler, der nichts zu tun habe mit den auf den Sonnenfinsternisaufnahmen beobachteten Verschiebungen der Sterne. Nach meinen obigen Feststellungen dürften diese zwei apodiktischen Behauptungen zu weit gehen. Wenn, wie Herr Kienle meint, der Effekt auf atmosphärischen Störungen beruhen könnte, warum soll er sich dann auf den Finsternisplatten nicht ebensogut zeigen wie bei den Meridiankreisbeobachtungen? Die Schlußbehauptung ist also völlig aus der Luft gegriffen.

Ich hoffe, daß endlich einmal der — von deutscher Seite längst geplante und von der Expedition 1923 in Mexiko auch ausgeführte — Versuch gelingt, bei Sonnenfinsternisaufnahmen auch zu einer Bestimmung der absoluten Ablenkungen der Sterne zu gelangen, weil m. E. nur auf diese Weise eine Entscheidung in der jetzt viel, aber vergeblich umstrittenen Frage des Gravitationseffektes möglich ist.

Berlin-Babelsberg, Sternwarte, April 1924.

(Eingegangen 18. April 1924.)

Erwiderung auf einige Bemerkungen des Herrn v. Gleich.

Von C. Cranz.

In der Physik. Zeitschr. **25**, 21, 1924 bringt Herr General v. Gleich zu dem im Jahre 1922 erschienenen Lehrbuch der Ballistik von Th. Vahlen eine nochmalige Besprechung, die, wie man beim Lesen sofort erkennt, in Wirklichkeit der Hauptsache nach eine Entgegnung auf die Rezension desselben Buches darstellt, die ich im Septemberheft 1923, S. 397 gegeben hatte. Darin hatte ich die Vorzüge des Buches hervorgehoben, das Studium desselben nachdrücklich empfohlen und dem Verfasser recht zahlreiche Neuauflagen gewünscht; aber gleichzeitig hatte ich auf einige Irrtümer aufmerksam gemacht, damit diese bei der nächsten Auflage ausgemerzt werden. Die Haupteinwände bezogen sich erstens auf das Luftwiderstandsgesetz für sehr große Geschoßgeschwindigkeiten und zweitens auf das Operieren mit Differentialen. Herr

v. Gleich bestreitet nun die Richtigkeit dieser Einwände. Ich muß daher nochmals das Wort in dieser Angelegenheit ergreifen.

1. Zu S. 14 und S. 61 war von mir angeführt worden, daß bei sehr großen Geschwindigkeiten v der Luftwiderstand W nicht, wie in dem Buche behauptet wird, der einfachen Geschwindigkeit, sondern dem Quadrat von v proportional sei. Dazu bemerkt Herr v. Gleich: „Unbegreiflicherweise beanstandet Cranz, daß Vahlen den Luftwiderstand bei sehr großer Geschwindigkeit dieser proportional annimmt. In der Tat führen alle bekannten Widerstandsgesetze, auch v. Eberhards, hierauf."

Die wichtigsten Luftwiderstandsversuche und -gesetze findet man z. B. in der in Bälde bei Springer in Berlin erscheinenden 5. Auflage meines Lehrbuchs der Ballistik oder auch, soweit er nicht vergriffen ist, in Band I der 4. Auflage von 1918 (anastatischer Neudruck der Auflage von 1917, mit einem Ergänzungsbogen, Verlag von B. G. Teubner in Leipzig); aus dieser 4. Auflage sind im folgenden die betreffenden Autorennamen und dazu in Klammern die zugehörigen Seitenzahlen vermerkt. Wenn der Luftwiderstand W, dividiert durch das Quadrat der Geschwindigkeit v von vornherein konstant ist oder wenn sich mit wachsender Geschwindigkeit v das Verhältnis $W : v^2$ asymptotisch einem von Null verschiedenen konstanten Grenzwert nähert, so ist der Luftwiderstand für sehr große Geschwindigkeiten proportional v^2. Darüber, ob dies der Fall ist oder nicht, läßt sich nur entscheiden oder wenigstens wahrscheinlich machen auf Grund der am weitesten gehenden und zugleich zuverlässigsten Luftwiderstandsversuche zusammen mit den rein theoretisch abgeleiteten Luftwiderstandsgesetzen, die allerdings bei dem heutigen Stand der Aerodynamik bloße Ansätze sind. Wie steht es nun damit?

Zunächst die letzteren. Bezüglich des Gesetzes von Newton (45), für das $W : v^2$ konstant ist, hat schon N. Mayevski 1870 aus den damals bekannt gewordenen Versuchen abgeleitet, daß sowohl für die Unterschallgeschwindigkeiten, wie für die Überschallgeschwindigkeiten dieses Gesetz zutreffe, jedoch mit einem rasch sich vollziehenden Wechsel des Luftwiderstandskoeffizienten, von 0,014 auf 0,039, in der Gegend der Schallgeschwindigkeit. P. Vieille (47) hat 1899 die Riemannsche Theorie der Luftwellen von endlicher Amplitude dazu benutzt, um ein mathematisches Luftwiderstandsgesetz aufzustellen. Dieses gibt lim $(W : v^2)/_{v=\infty} = \text{const}$. Dasselbe folgt aus dem Luftwiderstandsgesetz von A. Sommerfeld (49), es ist im Jahre 1910 mittels der Analogie des elektromagnetischen Feldes abgeleitet, das entsteht, wenn ein Elektron sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegt; die ballistische Verwendbarkeit wurde von P. Riebesell (503) gezeigt. Ebenso liefert die Formel, die H. Lorenz 1907/1917 (542) gelegentlich seiner bekannten Untersuchungen über den Schiffs- und Geschoßwiderstand entwickelt hat, den Grenzwert lim $(W : v^2)/_{v=\infty} = \text{const}$; mit der Bestimmung der darin vorkommenden Koeffizienten zum Zweck der Verwendung des Gesetzes in der ballistischen Praxis haben sich Sängewald und Falkenhagen beschäftigt. Endlich hat L. Prandtl (vgl. Handwörterbuch der Naturwissenschaften, Band 4, 1913, Artikel „Gasbewegung", S. 559) die Druckerhöhung berechnet, welche die Luft vor einem bewegten kleinen Körper im Staupunkt erfährt. Seine Berechnung zeigt, daß diese Druckerhöhung nicht nur für die kleinen Geschwindigkeiten, sondern wieder für die sehr großen Geschwindigkeiten proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit ist. L. Prandtl gibt den von ihm abgeleiteten mathematischen Ausdruck und dazu eine kleine Tabelle. Speziell betreffs der Geschosse führt L. Prandtl dabei aus: „Durch einen Analogieschluß aus dem Verhalten des Staudrucks läßt sich vermuten, daß auch der Geschoßwiderstand bei sehr großen Geschwindigkeiten wieder proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit wird, wenn auch mit einem anderen Koeffizienten, wie bei kleinen Geschwindigkeiten."

Was ferner die rein empirischen Luftwiderstandsformeln für Langgeschosse betrifft, nämlich die Zonen-Potenzgesetze $c \cdot v^n$ von Mayevski, Hojel, Siacci, Sabudski; das lineare Gesetz von Chapel-Vallier-Scheve (54) und das einheitliche Gesetz von Siacci (56), so wollten die Urheber dieser Formeln lediglich die Zahlenwerte der bis dahin bekannt gewordenen Luftwiderstandsdaten mathematisch approximieren. Aus diesen Formeln alsdann einen Schluß auf den Verlauf der Luftwiderstandsfunktion bei noch viel größeren Geschwindigkeiten, als sie bei den Versuchen selbst Verwendung fanden, ziehen zu wollen, lag den betreffenden Autoren fern. Ebenso sollen die Funktionen $i(v)$, die O. v. Eberhard bezüglich des Spitzenkoeffizienten i gebildet hat, bloß zur Zusammenfassung der betreffenden Versuchsreihen dienen. Übrigens ist die Richtigkeit der Exponenten n in jenen Potenzgesetzen zum Teil angefochten worden; z. B. von Siacci und Vallier die Richtigkeit der Hojelschen Exponenten. Und aus den Originalabhandlungen von Siacci (Rivista d'artigleria e genio, 1896, vol. 1) kann man ersehen, wie Siacci, bei der Aufstellung seines einheitlichen Gesetzes mittels der Methode der kleinsten Quadrate, zuerst von

dem linearen Gesetz von Chapel ausging, wie er aber bald sich genötigt sah, immer weitere Korrektionsglieder hinzuzufügen, bis schließlich jene Formel entstand, deren Aussehen sofort erkennen läßt, daß man es hier nicht mit dem Kind irgendeiner Theorie zu tun hat; das zugehörige, in der Enzykl. d. math. Wiss., Band IV Mechanik, Artikel 18 Ballistik, wiedergegebene Versuchsdiagramm zeigt, daß dabei die verschiedenartigsten Luftwiderstandsversuche, namentlich deutsche, englische, holländische und russische zusammengefaßt sind; verschieden waren die Kaliber, die Geschoßformen, die Messungsstrecken und damit die Bahnkrümmungen und Pendelungen. Aber Siacci hat sich ein Verdienst dadurch erworben, daß er alle damals vorliegenden Versuche streng wissenschaftlich zusammengefaßt hat. Wohl am meisten Vertrauen verdienen die Luftwiderstandsversuche, die 1911/12 von O. v. Eberhard mit Artilleriegeschossen und gleichzeitig von K. Becker und C. Cranz (58) mit Infanteriegeschossen durchgeführt worden sind (Artill. Monatshefte 1912, Nr. 69 und 71). Denn die Messungen erfolgten je mit einheitlichen Geschoßformen, auf möglichst kurzer Messungsstrecke, mit den neuesten Chronographen und unter möglichstem Ausschluß von Pendelungen. In den so gewonnenen Luftwiderstandstabellen von O. v. Eberhard (58) Nr. a für Kruppsche Normalgeschosse und Nr. b für zylindrische Geschosse ist keinerlei unsichere Theorie enthalten; die Zahlen geben lediglich die Versuchswerte an; auch eine $i(v)$-Funktion kommt darin nicht vor. Von diesen Tabellen nun gibt Nr. a einen konstanten Wert von $W:v^2$ für die sämtlichen letzten v-Werte, nämlich von $v = 1260$ m/sec ab bis zum Schluß der Tabelle, die bei $v = 1300$ endigt. Und die Tabelle Nr. b für zylindrische Geschosse zeigt eine Konstanz des Verhältnisses $W:v^2$ schon von $v = 1160$ ab, bis zum Schluß der Tabelle.

Aber mehr soll auch aus diesen Tabellen nicht herausgelesen werden, als was darin steht, daß nämlich die letzten Zahlen bis zu den Tabellenenden eine Proportionalität des Luftwiderstands mit dem Quadrat des Widerstands bei den größten gemessenen Geschoßgeschwindigkeiten andeuten. Im ganzen ist das Problem des Luftwiderstands bei Überschallgeschwindigkeiten so außerordentlich verwickelt, daß man sich vor jeder unbegründeten Extrapolation wird hüten müssen. Dessen sind sich die Ballistiker wohl bewußt. Wollte jemand es unternehmen, z. B. aus dem einheitlichen Gesetz von Siacci den Grenzwert von $\lim (W:v^2)$ für $v = \infty$ zu berechnen, so würde Siacci, wenn er noch lebte, sicherlich dagegen protestieren, und er würde erklären: Dies wäre eine noch gewagtere Extrapolation, als wenn jemand aus den heutigen politischen Zuständen Europas einen Schluß auf die Zustände im Jahr 2024 ziehen wollte.

Jedenfalls scheint nach dem Obigen genau das Gegenteil von dem richtig zu sein, was Herr v. Gleich mit so großer Bestimmtheit behauptet. Es ist nötig, dies festzustellen; denn die Frage nach dem Luftwiderstand bei sehr großer Geschoßgeschwindigkeit ist für die künftige Weiterentwicklung der Ballistik von grundlegender Wichtigkeit; und es muß verhindert werden, daß durch solche apodiktische Kundgebungen wie diejenigen des Herrn Generals sich bei den Jüngern der ballistischen Wissenschaft unrichtige Anschauungen festsetzen.

2. Zu S. 145 des Buchs hatte ich auf eine unzulässige Art des Differentiierens aufmerksam gemacht. Wenn es sich dabei nur darum gehandelt hätte, daß durch einen Druckfehler oder ein sonstiges kleines Versehen ein Buchstabe oder eine Zahl weggelassen worden war, hätte ich nicht daran gedacht, den betreffenden Punkt zu erwähnen (ebenso wie ich es unerwähnt gelassen hatte, daß in dem Buch von Vahlen der Name des Ballistikers Siacci durchweg falsch geschrieben ist). Aber es handelte sich darum, daß ein grundsätzlich unrichtiges Operieren mit den Differentialen vorliegt, das mit Notwendigkeit zu einem unrichtigen Ergebnis führt. Herr v. Gleich behauptet nun, „das gerügte Versehen bestehe lediglich darin, daß in der Beziehung

$$\frac{d^2p}{dx \cdot dp} = -2 \cdot \frac{d^2x}{dx^2}$$

der Faktor 2 rechts irrtümlich vergessen wurde". Ich muß Herrn v. Gleich darauf aufmerksam machen, daß an dieser Stelle Th. Vahlen noch richtig gerechnet hat, indem er hier den Faktor 2 nicht beisetzt. Da somit Herr v. Gleich nicht einmal die Stelle gefunden hat, wo der Fehler steckt, und noch weniger das Grundsätzliche des Einwands erkannt hat, muß die Angelegenheit im einzelnen besprochen werden:

Aus der Gleichung

$$\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + g = 0$$

oder

$$\frac{dp}{dx} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + g = 0,$$

wo p den Tangens des Horizontalneigungswinkels ω der Flugbahntangente im Punkt (x, z), somit $p = \operatorname{tg} \omega = \frac{dz}{dx}$ und t die Zeit bedeutet, wird geschlossen

$$\frac{d^2p}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dp}{dt} = 0$$

und daraus

$$\frac{\frac{d^2p}{dt^2}}{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dp}{dt}} = -\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2};$$

(Th. Vahlen läßt der Kürze halber in den Ableitungen die Nenner weg). Er schließt dann weiter:

$$\frac{d^2p}{dx\cdot dp} = -\frac{\dot{x}}{\dot{x}^2} = \frac{w\cdot\cos\omega}{v^2\cdot\cos^2\omega} = \frac{c}{\cos\omega},$$

wenn man das Newtonsche Gesetz $w = c\cdot v^2$ zugrunde legt. Bis dahin ist die Rechnung richtig. Nun aber wird weiter geschlossen: „Demnach erhält man eine integrable Gleichung z. B. für die Substitution $c = c_0\cdot\frac{\cos\omega}{\cos\omega_0}$ (Borda).

Denn das gibt:

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{c_0}{\cos\omega_0};\quad \frac{dp}{dx} = \frac{c_0}{\cos\omega_0}(p-p_0) + p'_0\text{“}.$$

Dies ist nicht richtig. Der Bruch

$$\frac{\frac{d^2p}{dt^2}}{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dp}{dt}}$$

darf nicht ersetzt werden durch den Differentialquotient

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{dp}{dx}\right).$$

Daß dies in der Tat unzulässig ist, kann Herr v. Gleich aus dem Umstand erkennen, daß sich aus letzterem ein anderes Resultat ergeben muß. Nämlich es ist:

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{d\left(\frac{1}{\frac{dx}{dp}}\right)}{dp} = \frac{d\left(\frac{-g}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\right)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dp}{dt}} =$$

$$= -2\cdot\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},\ \text{anstatt}\ -\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\ \text{wie oben.}$$

Hätte Herr v. Gleich auch zu diesem Einwand geschwiegen, so wäre mir erspart worden, darauf hinzuweisen, daß ein derartiges Umgehen mit den Differentialen bei den Studierenden der Mathematik unter Umständen ungünstig wirken kann.

Die weitere Bemerkung des Herrn v. Gleich, Cranz scheine am Standpunkt der Vorkriegszeit festhalten zu wollen, möchte ich dem Herrn General zur nochmaligen Überlegung empfehlen. Was dies und die sonstigen Einwände betrifft, so verweise ich auf den Aufsatz „Circa una recenta publicatione ballistica“, den der bekannte italienische Ballistiker Cavalli in der Rivista d'artigleria e Genio, Okt. 1923, S. 5—33 veröffentlicht hat. Darin unterzieht Cavalli das Vahlensche Buch auf rund 27 Druckseiten einer eingehenden, allerdings ziemlich bitteren Kritik. Sein Urteil faßt er schließlich in den Worten zusammen: „Im Ganzen bringt das Buch keine neue Erleuchtung, es würde vielmehr darauf abzielen, das Licht zu zerstören, das existiert.“

Mit Vorstehendem ist für mich diese Rezensionsangelegenheit abgeschlossen.

(Eingegangen 21. Februar 1924.)

Entgegnung auf die hauptsächlichsten Bemerkungen des Herrn Cranz.

Von G. v. Gleich.

In eigener Sache würde ich die vorstehenden Belehrungen des Herrn Geheimrats Cranz schweigend hinnehmen. Da es sich aber nur der Form nach um mich, in Wirklichkeit aber um Herrn Prof. Dr. Th. Vahlen handelt, bin ich schon als Kriegskamerad des letzteren wenigstens zu einer kurzen Antwort verpflichtet:

Zu 1. Unter den heutigen bedrängten wirtschaftlichen Verhältnissen ist es mir leider versagt, die von Herrn Cranz angeführte Literatur in vollem Umfang mit seinen Ausführungen zu vergleichen. Das ist aber auch kaum nötig.

Daß das verwickelte Widerstandsproblem von der Theorie mit einfachen Formeln restlos zu erfassen wäre, derart, daß z. B. bei sehr großen Geschwindigkeiten der Widerstand genau der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional wäre, glaube ich selbst am allerwenigsten. Das kann ein vorurteilsfreier Leser aus meiner Besprechung auch unmöglich herausgelesen haben. Vor allem scheint mir die Frage der äußeren Reibung noch lange nicht spruchreif zu sein, die ihrerseits von den noch ganz ungenügend bekannten Bewegungen der Geschoßachse sicher nicht unabhängig ist.

Die empirischen „Gesetze“ approximieren lediglich die Tabelle, die natürlich das Primäre ist. Würde man, was offenbar frei steht, andere Exponenten wählen, so würden sich damit andere Zonen ergeben.

Daß für verhältnismäßig kleine Intervalle (W/v^2) konstant erscheint, ist nur die Folge der Abrundung und kann deshalb nichts beweisen.

Der Abfall der Zahl $n = \frac{v\,dw}{w}$ von $v = 333$ m/sec ab gegen Eins hin ist, soweit

die Tabelle reicht, unverkennbar. Man kann $\lim(n_{\infty}) = 1$ vermuten, aber natürlich nicht beweisen. Prandtls Analogieschluß, den Herr Cranz wie ein gewichtiges Argument anführt, ist auch nichts anderes als eine „Vermutung". Daß aber Siacci zu einer Analogie mit den politischen Verhältnissen des Jahres 2024 gegriffen haben würde, wie Herr Cranz „sicherlich" annimmt, erscheint mir angesichts der überragenden Bedeutung des großen italienischen Ballistikers recht unwahrscheinlich. Inzwischen hat, wie ich höre, Herr Vahlen zur Frage des Luftwiderstandes selbst das Wort ergriffen (Zeitschr. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffwesen 1923, S. 120).

Zu 2. Diesen unerheblichen Rechenfehler hat Herr Vahlen selbst in einer Zeile berichtigt, wie ihn jeder nicht voreingenommene Leser ohne weiteres berichtigen wird. Die betr. Seite ist für alles übrige ohne jede Folgen.

Daß Herr Cavalli seinen Landsmann Siacci auf Kosten des Ausländers Vahlen lobt, ist verständlich. Immerhin aber hätte er schwerlich volle 27 Druckseiten aufgewendet, wenn Herrn Vahlens „Ballistik" wirklich so unbedeutend wäre, wie Herr Cranz es unter Anführung eines Italieners als Kronzeugen hinstellt.

Ludwigsburg, 17. April 1924.

(Eingegangen 18. April 1924.)

BESPRECHUNGEN.

K. Gruhn, Elektrotechnische Meßinstrumente. 2. Aufl. 223 S. m. 321 Fig. Berlin, Julius Springer. 1923. Geb. M. 5,80.

Nach einleitenden allgemeinen Bemerkungen über die konstruktiven Ausführungen der Meßinstrumente werden in 17 Kapiteln die verschiedenen in der elektrotechnischen Praxis verwendeten Arten behandelt. Die Zähler sind fortgelassen. In das Kapitel „Widerstandsmesser" ist der nicht unmittelbar zu den elektrotechnischen Meßinstrumenten gehörende Druck-Fernmesser von Hartmann & Braun aufgenommen. Wenn ein solches Instrument mit in den Rahmen des Buches gezogen wurde, hätten auch weitere erwähnt werden dürfen, die auf demselben Prinzip, einer durch irgendwelche Einflüsse erfolgenden Widerstandsänderung, beruhen, z. B. Luftgeschwindigkeitsmesser und Rauchgasprüfer. Das Kapitel über Oszillographen ist reichlich kurz. Im wesentlichen wird nur ihr Prinzip erläutert, während über Empfindlichkeit, Eigenschwingungsdauer usw. nichts gesagt wird. — Die Darstellung ist klar und die Anordnung des Stoffes sehr übersichtlich. Jede Instrumentengattung wird nach denselben Gesichtspunkten in derselben Reihenfolge behandelt, so daß man sich rasch beim Suchen nach irgendeiner Angabe zurechtfindet. Die Abbildungen sind sehr gut, zeigen allerdings vorwiegend Ausführungsformen der Firma Hartmann & Braun. Lohaus.

M. Milankovitch, Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire. Gr. 8°. XVI u. 339 S. m. 27 Abbildungen. Paris, Gauthier-Villars & Cie. 1920.

Als Aufgabe einer theoretischen Klimatologie kann man ansehen, die großen Züge in der räumlichen Verteilung der Witterungserscheinungen aus wenigen astronomischen und physikalischen Voraussetzungen rein deduktiv abzuleiten. Von einer Lösung dieser Aufgabe sind wir noch weit entfernt, im besonderen sind ja für eine Behandlung der dynamischen Vorgänge (Winde, Druckverhältnisse) und damit des allgemeinen Kreislaufs der Atmosphäre nur erst Ansätze vorhanden. Als einfachere Aufgabe läßt sich aber eine Theorie der thermischen Erscheinungen abgrenzen, soweit sie sich unabhängig von den dynamischen Vorgängen behandeln läßt. Diese Aufgabe behandelt das vorliegende Buch zum erstenmal in sehr umfassender Weise.

Ein rein theoretischer Teil behandelt die Verteilung der Sonnenstrahlung auf der Oberfläche eines Planeten unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen und ihre Beziehung zur Temperatur. Die Ergebnisse werden im zweiten Teil auf die Erdoberfläche angewandt. Besonders der Einfluß langperiodischer Änderungen der Sonnenstrahlung auf das Klima wird eingehend diskutiert; das Problem des Klimas früherer Zeiten (z. B. Eiszeit) wird behandelt, soweit dies im Rahmen der gestellten Aufgabe möglich ist (z. B. ohne Berücksichtigung der Verteilung von Land und Meer). Das Schlußkapitel endlich gibt sehr hübsche Anwendungen auf das Klima der anderen Planeten und des Mondes.

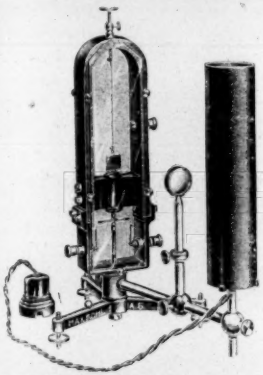
Die Darstellung ist ausführlich und leicht verständlich. Eine große Zahl von Beispielen ist zahlenmäßig vollständig durchgerechnet. Dabei werden die mathematischen Hilfsmittel weitgehend entwickelt, so daß das Buch auch für solche, die das mathematische Rüstzeug weniger gewohnt sind, als etwa der theoretische Physiker, eine gute Übersicht bietet über einen wesentlichen Fragenkreis der theoretischen Klimatologie. F. Hund.

Tagesereignisse.

Glastechnische Tagung. Im Hause des „Vereins deutscher Ingenieure", Berlin NW 7, Sommerstraße 4a, findet Freitag, den 23. Mai 1924, erstmalig eine Zusammenkunft aller derjenigen Personen und Kreise statt, welche an der Entwicklung der deutschen Glastechnik unter Mithilfe der wissenschaftlichen Forschung tätigen Anteil nehmen. Neben einer den geschäftlichen Teil behandelnden Mitgliederversammlung der „Deutschen glastechnischen Gesellschaft" (D. G. G.) wird eine Anzahl von Vorträgen technischen Inhaltes mit Lichtbildern gehalten. Veranlassung zu der Tagung gab die Notwendigkeit, für 323 glaserzeugende und 900 glasverarbeitende Betriebe Deutschlands die Gelegenheit zum technischen Meinungsaustausch zu schaffen. An ihm beteiligen sich auch die der Glasindustrie nahestehenden Forschungsstätten und fachlichen Berater. Anfragen an Dr. Ing. Maurach, Frankfurt a M., Gutleutstr. 8.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Max Kohl A.G. Chemnitz



61392. Drehspul-Spiegelgalvanometer.

Physikalische Apparate

Funken-Induktoren

Ölluftpumpen

Experimentier-Schalttafeln

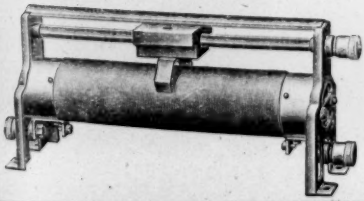
Projektions-Apparate

Laboratorienmöbel

in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel: 4 Grosse Preise; Turin: 2 Grosse Preise; Dresden: Grosser Preis.

PHYWE **-Gleitwiderstände**



Absolut zuverlässig

Denkbar einfach — Unerreicht billig

Verlangen Sie Liste PZW.

Physikalische Werkstätten A.-G.

Göttingen

G. E. Stechert & Co. in Leipzig, Hospitalstr. 10

kaufen stets gegen Bezahlung in **Dollars**

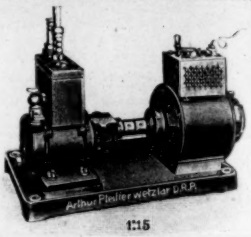
Wissenschaftliche Zeitschriften in vollständigen Reihen

z. B.

Annalen der Physik — Annalen der Chemie — Mathematische Annalen — Journal für praktische Chemie — Monatshefte für Chemie — Physikalische Zeitschrift — Zeitschrift für physikalische Chemie — Meteorologische Zeitschrift — Zeitschrift für Mathematik usw.

Angebote mit Preisangabe erbeten.

Pfeiffer's



1:15

Rot. Kammer-Öl-Luftpumpe D.R.P.

Hochvakuum-Pumpen, Vakua bis $^1/_{1\,000\,000}$ mm Hg.
Saugleistung bis 50 cbm per Stunde

Photometer aller Systeme

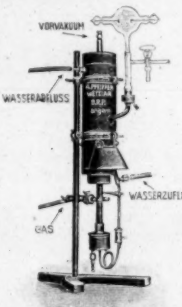
Öl-Prüfapparate, Schnellviskosimeter usw.

Funken-Induktoren bis 1000 mm Funkenlänge

Doppel-Pendelgleichrichter

Oscillographen

Quecksilber-Dampfstrahlpumpe
ganz aus Stahl D. R. P. angem.



1:20

15 Liter bis zum Aussetzen jeder Entladung in **10 Sek.** vom Vorvakuum ab.

Listen von Abt. H anfordern.

Vgl. Techn. Physik, 1922, Heft 12. Phys. Ztschr. 1922, pag. 463.

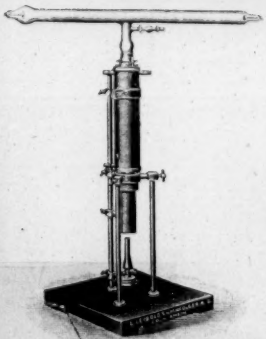
Arthur Pfeiffer
Wetzlar 8

Telegr. Vakupfeif. — Tel. 85 u. 86.

Neue Hochvakuum-Diffusions-Pumpe aus Metall

nach Prof. Gaede

D.R.P. und Auslandspatente angemeldet



$^1/_{10}$ nat. Gr.

Saugleistung: 15 Liter per Sek.

Vorvakuum: 20 mm

„Vergl. Zeitschrift für Technische Physik, Jahrg. 1923, Nr. 10"

Alleinige Hersteller

E. Leybold's Nachfolger A.-G.

Köln a/Rhein, Brüderstr. 7

Sonderliste auf Wunsch

Für den Anzeigenteil verantwortlich S. Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.